

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

Лекция 1. Моделирование как универсальный метод исследования

Любой человек или организация в своей повседневной и производственной деятельности часто сталкивается с ситуацией, когда необходимо:

- рассмотреть и оценить тот или иной объект, процесс, событие;
- идентифицировать его, составив о нем представление, описать его поведение в тех или иных условиях;
- принять решения по отношению к рассматриваемому объекту, обеспечивающие необходимые условия его работы, улучшение характеристик, повышение эффективности функционирования, достижение поставленных целей.

Решение таких задач может быть получено в результате абстрагирования реальной действительности (рассматриваемых объектов), то есть обобщенного представления и описания ее (их) с применением универсальных стандартных абстрактных приемов и шаблонов. Такой подход позволяет выявить общие закономерности, присущие различным по своей природе (сущности, проявлениям) объектам, процессам, явлениям.

Например, в курсе физики изучается процесс колебания математического маятника, описываемый соответствующими уравнениями. При этом эти уравнения и сам математический маятник можно рассматривать как абстрагированное представление реальных процессов, возникающих, например, при колебании чугунного шара на тросе крана, используемого для разрушения сносимых строений или колебании маятника башенных часов и т.д.

Этот пример подтверждает то, что между различными объектами и процессами может наблюдаться сходство, что позволяет описать их с использованием единого абстрагированного шаблона (уравнений). При наличии такого сходства два объекта при их абстрагированном представлении становятся неразличимыми, и вместо исследования одного из них можно выполнить исследование другого, распространив полученный результат на первый.

Ясно, что описанная методология исследования является универсальной, и при ее реализации определяющим становится установление сходства между разными объектами, обоснование возможности их единообразного представления с использованием стандартных абстрактных шаблонов. При наличии такого сходства рассматриваемый объект принято называть **оригиналом**, а используемый для его исследования и в этом смысле замещающий его второй объект – **моделью**.

Таким образом, модель можно рассматривать как двойник оригинала, позволяющий, с точки зрения поставленных целей и задач исследования,

изучить некоторые его свойства в определенных условиях. Следует подчеркнуть, что сходство между двойником и оригиналом может быть неполным, то есть достигаться не по всем характеристикам (форме, цвету, структуре и т.п.). Достаточно, чтобы сходство наблюдалось лишь в тех свойствах, которые подлежат рассмотрению и исследованию у оригинала.

Отметим следующие **свойства модели**:

1. *Модель всегда ориентирована на достижение конкретных результатов, проведение конкретных исследований*, например даже детские игрушки, как модели объектов действительной реальности, предназначены для изучения детьми окружающего мира.

2. *Не существует моделей, способных воспроизвести все свойства оригинала*. Это следует из того, что, во-первых, таких свойств, вообще говоря, бесконечно много и многие из них явно не проявляются. Во-вторых, воспроизвести все реальные свойства оригинала может только сам оригинал, а любой двойник, даже очень близкий, отличается от него.

Выбор определяющих и подлежащих исследованию свойств и условий, выполняемый на этапе предварительного изучения оригинала, позволяет сформулировать требования к модели, обеспечивающие достижение поставленных целей (требования к точности соответствия оригиналу, универсальности, возможности применения в различных условиях, обеспечению ответа на поставленные при исследовании вопросы, оценки свойств и характеристик и т.п.).

Так, арифметику можно рассматривать, как модель выполняемых счетно-обменных операций. Электрическая схема используется в качестве модели электронной аппаратуры. Электронная система автоматического управления на самолете является моделью, замещающей действия пилота. Глобус является моделью земного шара.

Моделированием называют процесс выбора из известных или построение новых моделей рассматриваемого объекта, позволяющих выполнить исследование интересующих свойств оригинала и оценку его характеристик в определенных условиях. Моделирование можно также рассматривать как процесс познания, позволяющий получить новую информацию об исследуемом объекте с использованием его модели.

Моделирование предполагает выполнение следующих этапов:

1. *Постановка задачи*. Здесь производится систематизация информации об объекте, полученной в результате наблюдений, изучение характерных для него процессов, а также формулировка практической проблемы, которую требуется решить с использованием модели. При этом из совокупности всех факторов, оказывающих влияние на моделируемый объект, отбираются наиболее значимые, оцениваются диапазоны их изменения и степень влияния на функционирование объекта, делаются обоснованные допущения.

2. *Построение модели*. Обычно предполагает не просто ее подбор из известного множества стандартных моделей, но и синтез, то есть сборку

общей модели из «элементарных» известных мультипредметных компонент (стандартных моделей), в том числе из различных областей науки, с помощью инструментальных средств, которые используются для исследования объекта.

3. *Проверка адекватности модели.* Предполагает проверку соответствия результатов, получаемых с помощью модели, реальному поведению исследуемого объекта. На этом этапе может происходить не только проверка, но также исследование и уточнение модели в соответствии с поставленной задачей, а также корректировка постановки задачи, и общего подхода к оценке адекватности.

4. *Проведение исследований с использованием модели.* Обычно предполагает оценку и прогнозирование поведения объекта в различных ситуациях, выбор наилучших технических и управленческих решений. Переход к этому этапу возможен только после завершения всех предыдущих.

Каждая из перечисленных стадий процесса моделирования существенна.

Следует отметить, что при построении моделей необходимо иметь четкое представление об основных свойствах объекта, проявляющихся в определенных условиях, причем не обязательно всех, а определяющих. Модель должна правильно учитывать только основные свойства, а диапазон возможных изменений параметров должен быть ограничен. Поэтому научные методы исследования должны основываться только на обоснованной замене оригинала моделью применительно к оценке основных свойств и условий, определяемых задачей исследования.

В современных условиях формирования цифровой экономики особое значение приобретает разработка цифровых двойников (моделей) реальных процессов, явлений, устройств, по возможности заменяющих оригиналы. Поскольку такие двойники, вообще говоря, могут полностью отражать свойства и функциональные возможности оригинала, то модель и оригинал становятся практически неразличимыми.

Так, в рамках модели Сбербанк-online реализуются многие операции, ранее выполняемые операционными офисами банков. В этих условиях модель полностью или во многом имитирует поведение реальных объектов. Такие модели называют **имитационными**.

Имитационная модель обычно включает:

- *математическую модель*, описывающую реальные свойства и особенности функционирования оригинала;
- *компьютерную программу*, реализующую модель и позволяющую находить числовые характеристики, описывающие оригинал, выполнять реализуемые им операции;
- *средства обработки, визуализации, демонстрации*, имитирующие поведение оригинала, которые дают возможность представлять результаты моделирования, интерпретировать их в наглядной, доступной для анализа и оценки форме.

Основные типы моделей

Модели можно классифицировать по их отношению к оригиналу, а также по соответствующим им внутренней организации и связям с оригиналом. Это означает, что они **отличаются по следующим признакам:**

- особенности описания свойств оригинала, реализованные в модели;
- инструментальным средствам, используемым для преобразования свойств модели в свойства оригинала.

По признакам описания свойств оригинала и особенностям функционирования модели подразделяются на:

- **логические**, построенные на принципах логики, из которых можно выделить: *образные* – дающие наглядное представление (например, образное представление автомобиля любым человеком); *символьные*, использующие символы (геометрические, химические и т.д.); *образно-символьные схемы*, например, карты, радиосхемы;
- **материальные**, построенные по объективным законам, из которых можно выделить: *функциональные* (например, протез сустава); *геометрические* (например, машина-игрушка); *функционально-геометрические* (например, модель самолета для исследований в аэродинамической трубе).

По используемым условиям представления свойств модели и оригинала модели разделяются следующим образом:

- *условные* – на основе принятого соглашения (например, система физических единиц измерения, система технической документации);
- *аналоговые* – с использованием логических выводов о сходстве (например, производная от функции по времени, описывающий пройденный путь, можно рассматривать как скорость перемещения);
- *математические* – с использованием математических соотношений.

Рассмотрим пример. Модель математического маятника строится при следующих допущениях:

- масса маятника сосредоточена в точке, размещенной на конце нити;
- нить длинная;
- нить нерастяжимая;
- нить невесомая;
- трение и аэродинамическое сопротивление при колебаниях отсутствуют;
- на тело действует единственная внешняя сила – сила тяжести.

Математический маятник, с учетом принятых допущений, можно классифицировать как образную, условную модель реального маятника. При малых углах отклонения маятника от положения равновесия, с помощью физических и математических рассуждений, можно показать, что колебания будут гармоническими, то есть описываются функцией $x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$. Такую модель можно классифицировать, как символьную, математическую. Если собрать реальный маятник и использовать его в качестве модели, то это

будет геометрическая (или функционально-геометрическая), аналоговая модель. Если собрать электрический колебательный контур, воспроизводящий колебания маятника, то его можно рассматривать как функциональную модель. Если разработать программу для ЭВМ, реализующую модель колебания реального маятника, то такая компьютерная модель будет функциональной, математической и дискретной (цифровой), в отличие от непрерывной (аналоговой) в предыдущем случае.

Из приведенного примера следует, что классификация моделей не является жесткой, одна и та же модель может обладать несколькими классификационными признаками.

Математические модели и их виды

Математическая модель является ядром, главным элементом любой имитационной модели. Особенно важным в теории математического моделирования является обеспечение на всех этапах разработки согласования модели с задачами и целями исследования. Параметры, определяющие такие модели, должны быть заданы точно или с некоторой обоснованной вероятностью (надежностью). В основе таких моделей обычно лежат уравнения, описывающие основные процессы и наблюдения в оригинале.

Даже частные модели отдельных явлений, используемые при составлении более общих и сложных моделей, должны быть обосновано сформулированы и описаны с точки зрения условий и области применения. При разработке различных моделей систем и процессов необходимо обоснованно искать способ, как можно более точного задания определяющих объект характеристик, как функциональных, так и числовых. При этом в моделях сложных объектов часто возникает необходимость учета большого числа факторов, влияющих на их поведение, причем не только тех, которые описываются известными законами природы. Неучет (пренебрежение) некоторыми из них всегда должен быть строго обоснован.

Математические модели представляет собой математическое описание объекта. Это описание должно отражать взаимосвязи между основными параметрами оригинала, определяющими особенности его функционирования. Такие связи могут описываться с помощью:

- функций;
- обыкновенных дифференциальных уравнений или систем;
- разностных уравнений и их систем;
- логических алгоритмов функционирования;
- вероятностных (стохастических) законов изменения состояния.

Математическое описание объекта предполагает не только указание взаимосвязи между элементами и параметрами объекта (законы и закономерности), но и должно включать задание полного набора числовых и функциональных данных, характеризующих объект (параметры, характеристики, начальные и граничные условия, ограничения и т.д.), а

также методы и алгоритмы вычисления выходных параметров и характеристик модели.

Поэтому под **математическим описанием объекта** следует понимать полную совокупность данных, функций и методов вычисления, позволяющую получать требуемый результат моделирования.

Различают следующие **типы математических моделей**:

- **расчетные** в виде формул, таблиц, алгоритмов, графиков, номограмм;
- **подобные**, предполагающие одинаковое математическое описание при пропорциональном изменении соответствующих параметров;
- **линейные** или **нелинейные**, описываемые функциями, которые содержат основные параметры в степени не выше первой (линейные модели) или любыми видами функций;
- **стационарные** или **нестационарные**, не зависящие или зависящие от времени;
- **непрерывные** или **дискретные**, предполагающие изменение состояния в любой или в фиксированные моменты времени;
- **четкие** или **нечеткие**, описывающие четко определенные или нечеткие качества (например, с помощью нечетких множеств: около 10; глубоко или мелко; хорошо или плохо);
- **детерминированные** или **стохастические**, предполагающие точное, однозначное представление или вероятностное, при котором изменение состояния происходит с некоторой вероятностью (модели массового обслуживания, имитационные и др.).

Под **детерминированной моделью** понимают вид модели, допускающий описание в виде аналитических зависимостей или выполняемых последовательно вычислительных алгоритмов. Они позволяют при одних и тех же исходных данных получить один и тот же результат.

Второй основной тип моделей это **модели стохастические**. Они являются моделями оригиналов, отдельные элементы которых нельзя описать аналитически или с помощью однозначного алгоритма функционирования. Математической основой таких моделей являются случайные величины и процессы.

Стохастические модели используют математический аппарат теории вероятностей, математической статистики, теории массового обслуживания и метода статистических испытаний (метода Монте-Карло).

Лекция 2. Адекватность математических моделей

Математическая модель позволяет выполнить исследования объекта путем проведения вычислительного эксперимента. **Вычислительный эксперимент** – это процесс получения информации о поведении объекта с использованием математической модели для каких-либо конкретных наборов

исходных данных. Это может быть расчет одного из параметров или расчет нескольких параметров модели при различных значениях исходных данных.

Достоверность результата вычислительного эксперимента обеспечивается при одновременном выполнении *двух условий*. Во-первых, *результат должен достигаться с контролируемой точностью*. Во-вторых, *не может быть опровергнут с помощью каких-либо дополнительных расчетов*.

При планировании вычислительного эксперимента и обработке его результатов могут быть также использованы методы математического моделирования, в первую очередь математической статистики.

Одной из основных характеристик математических моделей является адекватность. **Адекватность математической модели** понимается, как соответствие результатов вычислительного эксперимента поведению реального объекта в рассматриваемых условиях. Это должно оцениваться с точки зрения целей исследования. При этом возможны разные подходы к оценке адекватности различных моделей.

Для технических систем и технологических процессов, характеризующихся измеримыми величинами (параметрами), обычно проводятся сравнения найденных в результате расчета параметров модели и оригинала в одних и тех же условиях при одних и тех же исходных данных. При этом следует сравнивать соответствующие друг другу параметры между собой только в тех условиях функционирования объекта, при которых проводится исследование. Для оценки адекватности математической модели поведению оригинала технической системы и процесса достаточно проверить выполнение двух условий: *точности и непротиворечивости*.

Точность означает, что обобщенная характеристика рассогласования соответствующего параметра (параметров) модели u_m и оригинала u_{op} :

$\Delta u = |u_m - u_{op}|$, должна быть не больше заранее заданной величины $\Delta u_{доп}$. В качестве обобщенной характеристики (приемлемой погрешности) могут выступать наибольшее по модулю значение рассогласования, среднее значение рассогласования или его статистическая оценка.

Непротиворечивость предполагает наличие идентичного характера изменения сравниваемых характеристик модели и оригинала, например, сходственный вид основных функциональных зависимостей (интервалы возрастания, убывания, наличие максимумов и минимумов). При этом возможно использование различных критериев проверки непротиворечивости, которые должны быть согласованы с целями исследования. В случае, когда сравниваемые параметры при функционировании объекта могут принимать множество различных значений, выводы о соответствии поведения модели и оригинала можно сделать только на основании статистической обработки результатов при различных значениях параметров.

Проверка адекватности модели предполагает наличие:

- необходимой информации о реальном объекте, которую в отдельных случаях бывает трудно, а часто и невозможно получить;
- результатов одного или нескольких контрольных вычислительных экспериментах, воспроизводящих поведение оригинала;
- критериев оценки точности математической модели;
- критериев проверки непротиворечивости математической модели.

При выборе критериев адекватности модели необходимо учитывать ее особенности, область применения, в том числе:

- диапазон возможного изменения параметров системы, например, вследствие ограничения области функционирования объекта, в которой выполняется ее моделирование;
- соответствие математического описания условиям проведения вычислительного эксперимента;
- возможную неоднозначность, которая может возникнуть при проведении вычислительного эксперимента;
- точность выполнения вычислительного эксперимента на модели и натурального на оригинале.

Точность модели оценивается погрешностью, характеризующей меру рассогласования значений, полученных в результате расчета параметров, по сравнению с их значениями у оригинала. Если u – такой параметр, u_m и u_{op} – его значения, получаемые в одних и тех же условиях с помощью модели и оригинала, соответственно, то для оценки точности могут быть использованы:

– абсолютная погрешность $\Delta u = |u_m - u_{op}|$;

– относительная погрешность $\delta u = \frac{\Delta u}{|u_{op}|} \cdot 100\%$;

– относительная приведенная погрешность $\delta u = \frac{\Delta u}{u^*}$, где u^* –

некоторое характерное значение, например $u^* = \max |u|$.

При моделировании могут возникать следующие **типы погрешности**:

- *грубая*, недопустимая с точки зрения проводимых исследований;
- *удовлетворительная*, допустимая с точки зрения исследований;
- *случайная*, принимающая случайные значения при многократном повторении опыта в неизменных условиях (например, замер времени при свободном падении тела с большой высоты, измеряемого с помощью одного и того же секундомера);
- *систематическая*, принимающая постоянные значения при многократном повторении опыта в одних и тех же условиях (например, тот же опыт, что и в предыдущем случае, но с использованием секундомера, который в связи с выходом из строя, начинает отсчет с задержкой на 0,1 после пуска).

При математическом моделировании возникают погрешности, обусловленные разными причинами, в том числе:

– *погрешность используемой физической абстракции*, возникающая в связи с неточным учетом и описанием физических законов и закономерностей или обусловленная пренебрежением в модели некоторыми существенными факторами, определяющими поведение оригинала;

– *погрешность математического описания*, связанная с неточностью или приближенным видом задания используемых уравнений, приближенным представлением исходных данных, погрешностью расчетов, погрешностью используемых численных методов решения;

– *погрешность обработки*, возникающая при округлении результатов, неправильном графическом их представлении.

Сформулируем основные свойства погрешности. Пусть x и y – оцениваемые по результатам моделирования параметры; Δx , Δy – их абсолютные погрешности; δx и δy – относительные погрешности. Пусть dx и dy – величины отклонений от точных значений параметров a и b , связанные с погрешностями: $|dx| = \Delta x$; $|dy| = \Delta y$. Тогда имеем:

1. Абсолютная погрешность суммы параметров

$$(x + dx) + (y + dy) = (x + y) + (dx + dy).$$

С учетом свойств модуля, получаем неравенство

$$\Delta(x + y) \leq \Delta x + \Delta y,$$

то есть абсолютная погрешность суммы не превышает суммы абсолютных погрешностей слагаемых.

2. Для относительной погрешности суммы получаем

$$\delta(x + y) \leq \frac{dx + dy}{|x + y|} = \frac{\delta x \cdot |x| + \delta y \cdot |y|}{|x + y|}.$$

Пусть для определенности $x > 0$, $y > 0$ и $\delta x < \delta y$, тогда имеем:

$$\frac{\delta x \cdot x + \delta y \cdot y}{x + y} \leq \frac{\delta y \cdot x + \delta y \cdot y}{x + y} = \delta y.$$

Во всех случаях получаем:

$$\delta(x + y) < \max(\delta x, \delta y).$$

Поэтому относительная погрешность суммы не превышает наибольшую относительную погрешность слагаемых.

3. При оценке абсолютной погрешности разности имеем

$$(x + dx) - (y + dy) = (x - y) + (dx - dy),$$

поэтому абсолютная погрешность разности удовлетворяет условию

$$\Delta(x - y) \leq |\Delta x| + |\Delta y|.$$

Таким образом, *абсолютная погрешность разностей не превышает суммы абсолютных погрешностей величин, входящих в разность.*

4. Для относительной погрешности разности имеем

$$\delta(x-y) \leq \frac{\Delta x + \Delta y}{|x-y|} = \frac{\delta x \cdot x + \delta y \cdot y}{|x-y|}.$$

Отсюда следует, что относительная погрешность разности $x-y$ может принимать значения значительно большие по сравнению с погрешностями x и y . Более того, при близких значениях x и y она даже неограниченно возрастает.

Из этого следует, что при приближенных вычислениях следует стремиться исключить использование разностей найденных приближенно величин. Этот факт необходимо учитывать при разработке компьютерных программ, реализующих математические модели.

5. Найдем абсолютную погрешность произведения параметров, считая их для определенности положительными ($x > 0$, $y > 0$). Тогда полагая $u = xy$, $\ln u = \ln x + \ln y$ и используя приближенную оценку дифференциала

$$\Delta \ln u = \frac{\Delta u}{u}, \text{ получаем} \quad \frac{\Delta u}{u} \approx \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y};$$

$$\Delta(u) \approx u(\delta x + \delta y).$$

6. Для относительной погрешности произведения имеем:

$$\delta(xy) \leq \frac{\Delta(xy)}{xy} \approx \delta x + \delta y,$$

то есть относительная погрешность произведения равно сумме относительных погрешностей сомножителей.

7. Оценим относительную погрешность отношения значений параметров x , y , считая, что $x > 0$, $y > 0$. Положим $u = \frac{x}{y}$, тогда

$$\ln u = \ln x - \ln y \text{ и}$$

$$\frac{\Delta u}{u} = \delta(u) \leq \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} = \delta x + \delta y,$$

то есть относительная погрешность частного не превышает сумму относительных погрешностей делимого и делителя.

8. Для абсолютной погрешности отношений получаем оценку

$$\Delta(u) \leq u(\delta x + \delta y).$$

9. Пусть теперь показатель y равен $y = f(x)$, где $f(x)$ – заданная непрерывно дифференцируемая функция показателя x . Тогда получаем следующие оценки для погрешности показателя y :

$$\Delta y \approx |f'(x)|\Delta x \leq \max |f'(x)|\Delta x;$$

$$\delta y = \frac{\Delta y}{|y|} = \frac{|f'(x)|\Delta x}{|f(x)|}.$$

В случае, когда $f(x) > 0$ имеем

$$\delta y = \left| \frac{d \ln f(x)}{dx} \right| \Delta x \leq \max \left| (\ln f(x))' \right| \Delta x.$$

В заключении отметим, что погрешность моделирования обычно определяется используемыми методами и алгоритмами решения задачи. Поэтому при моделировании выбор численных методов должен быть всегда обоснован.

Основные этапы проведения исследований с использованием математических моделей

Математическое моделирование является универсальным инструментарием научных, производственно-технических и социально-экономических исследований, применение которого требует соблюдения определенных правил, позволяющих снизить риск получения неверных результатов. При разработке математических моделей следует стремиться придерживаться следующей последовательности действий:

1. *Изучение оригинала*, которое предполагает выявление основных факторов, особенностей, диапазонов изменения числовых параметров, определение условий решения задач, постановку (формулировку) задачи исследования, задание необходимой точности расчетов.

2. *Феноменологическое описание оригинала* («физическое», натурное, объектное описание), которое выполняется с учетом известных аналогий, функциональных описаний, зависимостей, моделей, полученных ранее в рассматриваемой предметной области, а также с учетом достижений в других областях науки, учитывая потенциальную возможность их применения.

3. *Выполнение математического описания оригинала* в виде его обоснованной математической модели.

4. *Разработку алгоритма численной реализации* математической модели с использованием имеющихся средств и методов вычислительной математики.

5. *Разработку программного обеспечения* для реализации математической модели на компьютере.

6. *Проведение контрольных вычислительных экспериментов*, воспроизводящих реальное доступное для исследования и оценки поведение оригинала в конкретных условиях.

7. *Оценку адекватности результатов* контрольного вычислительного эксперимента путем их сравнения с имеющимися данными о поведении оригинала в тех или иных условиях.

8. *Планирование вычислительного эксперимента* согласно целям исследования.

9. *Проведение вычислительного эксперимента* в соответствие с принятым планом, обработку его результатов.

10. *Анализ результатов вычислительного эксперимента*, сравнение с результатами, полученными на оригинале.

11. *Формулировку выводов* по результатам выполненных исследований.

Пункты 1 – 7 собственно и составляют сам процесс моделирования (построения и реализации математической модели). Здесь может возникнуть необходимость идентификации отдельных параметров модели. Такой процесс возможно будет выполняться многократно, в соответствии с пунктами 3 – 7.

Указанные этапы являются общими. Они реализуются при всех исследованиях, выполняемых с использованием математических моделей.

Основные принципы моделирования технических систем и технологических процессов

При использовании имитационного моделирования в качестве инструментария для анализа работы и проектирования технических систем, следует ориентироваться на выполнение следующих принципов:

1. *Обеспечение требуемой степени адекватности математической модели.* Модель не может быть использована для оценки объекта, если она не прошла оценку адекватности. Адекватность математической модели достигается при удовлетворительной ее точности и непротиворечивости по отношению к поведению оригинала.

2. *Принцип гибкости, инвариантности и динамичности математической модели,* который предполагает обоснованный выбор для реализации модели необходимого программного обеспечения, наличие у него специальных свойств, обеспечивающих оперативную настройку в соответствии со структурой рассматриваемого объекта, его параметрами и характеристиками.

3. *Принцип состоятельности результатов вычислительного эксперимента,* который требует достижения результатов, близких к истинным, то есть как у оригинала. Состоятельность также можно понимать статистически, в том смысле, что при увеличении объема информации результаты вычислительного эксперимента должны становиться как угодно близкими к истинным значениям параметров исследуемого объекта с вероятностью, равной единице.

4. *Принцип удобства при выполнении моделирования,* который предполагает простоту и удобство работы с программным обеспечением, в том числе при подготовке данных для выполнения различных вариантов расчета, обработки и представления результатов вычислительного эксперимента. Это достигается развитым интерфейсом, диалоговым режимом работы, наличием сервисного программного обеспечения (представления результатов в виде таблиц, графиков и т.п.), унификацией всего программного обеспечения.

5. *Принцип обоснованного планирования вычислительного эксперимента* обеспечивается в результате применения специальных методов и приемов планирования эксперимента.

6. *Принцип конкретизации условий и области применения разрабатываемой математической модели.* Его выполнение особенно важно при математическом моделировании сложных систем. Он исключает возникновение попыток построения одной математической модели, описывающей всевозможные сценарии поведения оригинала, в тех случаях, когда это не возможно, предполагает построение нескольких математических моделей с достаточной степенью адекватности, отражающих отдельные стороны поведения объекта. Прием использования нескольких моделей, называемый **декомпозицией**, часто позволяет добиться достоверности получаемых результатов вычислительных экспериментов с использованием более простых моделей, построить которые оказывается проще.

Лекция 3. Особенности разработки математических моделей

При разработке математических моделей нужно понимать, что можно построить очень сложную математическую модель, учитывающую все существенные и несущественные факторы и явления, однако, получить результат с ее помощью оказывается не менее сложно, чем напрямую на оригинале. С другой стороны, можно построить очень простую модель, отображающую небольшое число свойства объекта, но применять ее для исследования окажется невозможно в виду низкой точности.

Поэтому, при построении математических моделей, возникает необходимость поиска оптимального компромисса между простотой модели и степенью ее адекватности изучаемому оригиналу, что соответствует принципу разумной достаточности.

Построение математической модели (синтез ее структуры и указание параметров) требует решения нескольких проблем, в том числе:

- *многокритериальной оценки качества функционирования моделируемой системы*, что достигается заданием нескольких, возможно противоречивых критериев;

- *снижения размерности используемых описаний сложных систем* моделей – снижения числа переменных в модели, описывающих состояние оригинала;

- *обеспечения адекватности модели.*

Под **многокритериальностью** следует понимать наличие нескольких требований к сложной системе в целом или к ее элементам и характеристикам, отражающим свойства моделируемого объекта (например, экономичность и безопасность полетов при пассажирских перевозках, быстрота и качество обслуживания, цена и качество продукции и т.д.).

Для обеспечения **адекватности** математической модели требуется обосновать принимаемые допущения, выделять из всех факторов, влияющих на функционирование объекта главные, подлежащие учету. Кроме того, в зависимости от структуры математической модели следует для ее реализации выбирать наиболее приемлемые и эффективные вычислительные методы. Обоснованными также должны быть критерии адекватности.

При разработке математических моделей применяются следующие методы:

1. **Ранжирование**, которое предполагает обоснованный, неформальный, возможно экспертный анализ, в результате которого выполняется ранжирование параметров и явлений по важности (рангу). При этом наиболее важные факторы, определяющие состояние объекта, следует учитывать, а наименее важными часто можно пренебречь.

2. **Агрегирование** (декомпозиция) сводится к разбиению большого числа факторов (параметров), характерных для оригинала, на небольшое число групп, блоков (агрегатов) по определенным правилам. Далее устанавливаются связи между блоками, которые можно формализовать и учесть. Часто это позволяет находить решение задачи с переменными, характеризующими каждый агрегат, независимо от других.

3. **Оценки области изменения основных параметров** (факторов) объекта: точек, линий, плоскостей, других границ, называемых **бифуркациями**, на которых происходят резкие изменения качественного поведения рассматриваемой системы, переход из одного состояния в другое. Качественное поведение систем в условиях таких переходов описывается **методами математической теории катастроф**. Такой анализ необходимо делать с учетом того, что математические модели объекта в разных состояниях (до и после «катастрофы») могут принципиально отличаться.

4. **Методы последовательных приближений**, позволяющие последовательно на каждом новом шаге расчета выполнить более точную оценку значений параметров модели, или даже ее структуры. Такие шаги выполняются многократно.

5. **Метод проб и ошибок**, согласно которому по результатам одного или нескольких многовариантных расчетов, в результате сравнения с оригиналом, находятся уточненные оценки значений параметров модели, а также ее структуры, позволяющие снизить ошибки моделирования.

6. **Метод перебора** предполагает поиск решения путем перебора возможных значений параметров, причем перебор может быть простым или случайным.

7. **Метод статистической проверки гипотез** предполагает формулировку, анализ и проверку разных предположений о причинах получения определенного результата. Этот метод применяется в том случае, когда требуется найти не количественное, а качественное объяснение

сложного и неординарного явления, на которое оказывают влияние случайные факторы.

8. **Методы экспертных оценок** предполагают экспертную оценку структуры и параметров модели.

Подобие и анализ размерностей

Теория подобия является инструментом унификации и обобщения математических моделей разных оригиналов. В математическом моделировании два объекта считаются **подобными**, если выполняются два условия:

- 1) они имеют одинаковое математическое описание;
- 2) соответствующие переменные моделей связаны между собой коэффициентами пропорциональности (подобия) или масштабами приведения, при которых сохраняются неизменными определенные соотношения между коэффициентами пропорциональности, называемыми **критериями подобия**.

Для сравнения результатов измерений одной и той же величины, или однородных величин, используются эталоны (масштаб). Для этого вводятся единицы измерения, размерные и безразмерные величины.

Единицей **измерения физической величины D** (размерностью, обозначаемой с помощью квадратных скобок $[D]$) называется условно выбранная в качестве эталона физическая величина, имеющая тот же самый физический смысл, что и величина D . При этом значение любой физической величины представляется двояко, в виде ее числового значения (масштабного множителя по отношению к единице измерения) и размерности.

Используемые при моделировании величины, численное значение которых зависит от принятых единиц измерения, называются **размерными**.

Величины, численное значение которых не зависит от принятых единиц измерения, называют **безразмерными**.

Переход от размерной величины к безразмерной осуществляется путем деления произвольного значения первой на какую-либо фиксированную ее величину, называемую **базисной**.

Анализ размерностей широко используется при математическом моделировании и позволяет описать различные объекты с использованием одинаковых математических моделей.

Порядок и правила применения размерностей устанавливают системы единиц измерения. В физике использовалось достаточно большое количество таких систем: СГС, техническая, МКС, МКСА, СГСЭ и СГСМ.

В 1960 году в Париже XI Генеральная конференция по мерам и весам приняла *Международную систему единиц измерения, обозначаемую SI (в русской транскрипции СИ)*. Сегодня эта система на территории России утверждена ГОСТ 8.417–81 *Единицы физических величин*. Этим стандартом устанавливаются правила применения размерностей в технической документации, терминология и система обозначений.

В любой системе можно выделить основные единицы, через которые с помощью законов природы определяются остальные. В 1832 г. Гаусс предложил в качестве основных единиц измерения выбирать независимые единицы (в совокупности не связанные между собой законами природы), на которых строится вся система физических единиц.

В СИ основными единицами приняты:

- метр [м] в качестве меры длины;
- килограмм [кг] в качестве меры массы;
- секунда [с] в качестве меры времени;
- ампер [А] в качестве меры силы электрического тока;
- кельвин [°К] в качестве меры термодинамической температуры;
- моль [моль] в качестве меры количества вещества;
- кандела [кд] в качестве меры силы света.

Кроме этого, вводятся дополнительные единицы измерения плоских углов – радиан [рад] и телесных углов – стерadian [ср], являющиеся безразмерными.

Остальные размерные единицы принято называть **производными**. Они получаются из основных с помощью физических законов.

Например, единица мощности N Ватт [Вт] получается из следующих формул, отражающих известные законы механики, с использованием величин: работа, сила, масса и ускорение, и их размерностей:

$$N = \frac{A}{t} = \frac{Fs}{t} = \frac{mas}{t}.$$

$$\text{Откуда } [N] = \text{Вт} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{с}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^3}.$$

В системе СИ предполагается использование минимального набора основных единиц, обеспечивающих запись физических законов без использования размерных числовых коэффициентов.

Продemonстрируем основные положения теории размерностей примером. Многие законы природы в любой системе единиц измерения описываются степенными функциями (их называют симплексами) вида

$$z = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n},$$

(1.1)

то есть в виде произведения размерных величин x_i , описывающих рассматриваемое явление, которые в законе учитываются с показателями a_i . Например, законы Ньютона, Кулона, Фарадея и т.д. описываются именно такими степенными функциями. Отметим, что функциональные соотношения, содержащие суммы или разности, отражающие основные законы природы, являются их следствием. При этом из формулы (1.1) формально получаем, что отношение

$$\pi = \frac{z}{x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}}$$

безразмерно, с учетом того, что числитель и знаменатель имеют одинаковую размерность в силу записи закона природы. Можно строго доказать, что при условии (1.1) независимая от выбора системы единиц связь между $n+1$ размерными величинами $z, x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, \dots, x_n^{a_n}$ формируется в виде $n-k$ безразмерных соотношений (степенных комплексов), называемых **критериями подобия**, где k – количество величин из используемых, имеющих независимые (основные) размерности.

Данный результат содержится в формулировке так называемой *π -теоремы подобия*, которая широко используется при математическом моделировании. Действительно, при анализе изучаемого явления достаточно выбрать параметры, которые его характеризуют, и составить из них все возможные критерии подобия. Эти критерии подобия отражают с точностью до безразмерного числового коэффициента все действующие в рассматриваемом явлении законы природы. Поэтому, зафиксировав значения критериев, можно распространить результаты одного расчета на множество процессов с разными значениями параметров, при которых значения установленных критериев остаются неизменными.

В случае зависимости вида (1.1) критерии подобия могут быть получены в следующем порядке. Сначала в правую часть выражения (1.1) подставляются размерности $[x_1], [x_2], \dots, [x_n]$ всех фигурирующих в формуле (1.1) величин, причем производные размерные единицы выражаются через основные единицы в системе СИ. Далее выполняется преобразование показателей степеней с одинаковыми основаниями, в качестве которых выступают размерности основных единиц. Преобразования выполняются с учетом того, что при перемножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются. В результате формируется критериальное соотношение вида:

$$\pi = [x_i]^{\alpha_i} [x_j]^{\alpha_j} \dots [x_s]^{\alpha_s} = 1, \quad (1.2)$$

где общее число основных единиц x_i, x_j, \dots, x_s равно k , а показатели $\alpha_i, \alpha_j, \dots, \alpha_s$ находятся в результате преобразования степеней с одинаковыми основаниями, соответствующими основным единицам, и поэтому выражаются через величины a_1, a_2, \dots, a_n .

После этого, для обеспечения выполнения критериального выражения (1.2), формируется система k линейных алгебраических уравнений относительно величин a_1, a_2, \dots, a_n вида: $\alpha_i = 0; \alpha_j = 0; \dots; \alpha_s = 0$.

При этом $\alpha_i, \alpha_j, \dots, \alpha_s$ выражаются через величины a_1, a_2, \dots, a_n явно, причем $k < n$ и система имеет ненулевые решения. В результате ее решения находятся значения величин a_1, a_2, \dots, a_n и, после подстановки их в формулу (1.1), соответствующие величинам a_1, a_2, \dots, a_n критериальные соотношения.

Рассмотрим в качестве примера движение вязкой жидкости в гладкой трубе (ламинарный или турбулентный потоки). Основными параметрами, характеризующими данный процесс, являются радиус трубы r [м], вязкость жидкости μ [кг/(м·с)], плотность жидкости ρ [кг/м³], средняя скорость движения жидкости v [м/с]. Выясним, можно ли из этих четырех параметров составить безразмерный степенной комплекс. Для этого образуем степенное критериальное соотношение вида (1.2):

$$\pi = r^{a_1} \mu^{a_2} \rho^{a_3} v^{a_4}.$$

В данном случае $n = 4$. Определим, при каких значениях показателей степеней a_1, a_2, a_3, a_4 будет достигаться равенство (1.2). Учтем, что размерности [м], [кг], [с] независимы (они являются основными единицами измерения в СИ) и, поэтому не могут быть переведены друг в друга возведением в какие-либо степени. Поэтому, в данном случае $k = 3$. С учетом основных размерностей величин, получаем:

$$\begin{aligned} [\pi] &= [r]^{a_1} [\mu]^{a_2} [\rho]^{a_3} [v]^{a_4} = \text{м}^{a_1} \text{кг}^{a_2} \text{м}^{-a_2} \text{с}^{-a_2} \text{кг}^{a_3} \text{м}^{-a_3} \text{м}^{a_4} \text{с}^{-a_4} = \\ &= \text{м}^{a_1 - a_2 - 3a_3 + a_4} \text{кг}^{a_2 + a_3} \text{с}^{-a_2 - a_4} = \text{м}^0 \text{кг}^0 \text{с}^0 = 1. \end{aligned}$$

Имеем следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно показателей степени a_1, a_2, a_3, a_4 :

$$\begin{cases} a_1 - a_2 - 3a_3 + a_4 = 0, \\ a_2 + a_3 = 0, \\ -a_2 + a_4 = 0. \end{cases}$$

Находим общее решение полученной системы: $a_1 = a_4$, $a_2 = -a_4$; $a_3 = a_4$, где a_4 – произвольное число (свободная неизвестная). Подставляя найденные значения в соотношение (1.1), получаем следующий безразмерный степенной комплекс:

$$\pi = \left(\frac{rv}{\mu} \right)^{a_4},$$

где число a_4 выбирается произвольно.

Полагая $a_4 = 1$, получаем критерий подобия в виде равенства $\pi = \frac{rv}{\mu} = \text{Re}$,

где полученное число Re известно в теории подобия, как *число Ренольдса*.

Таким образом, получаем, что процессы движения вязкой жидкости в гладкой трубе при разных значениях параметров r, ρ, μ, v будут подобны, если для них выполняется равенство $\text{Re} = \text{const}$.

Отметим следующую особенность. Применение критериев подобия в математическом моделировании возможно только в случае, когда *система определяющих исследуемое явление или процесс параметров является полной с точки зрения их описания*. Если это условие не выполняется, то может возникать ситуация, когда сформулировать критерии подобия окажется

невозможным. Например, для определения величины мощности N некоторого процесса, набора из трех параметров: ρ – плотность среды; s – путь; T – температура, будет недостаточно. Это следует из того, что у этих величин отсутствует размерность времени, которая есть в размерности мощности. Поэтому невозможно получить с помощью этих трех параметров безразмерный степенной симплекс в ситуации, когда предпринимается попытка найти мощность с использованием остальных трех показателей.

Отметим, что критериальные соотношения могут быть получены и в случае других, отличных от (1.1) соотношений, описывающих исследуемые процессы и явления.

Лекция 4. Технологии проектирования и эксплуатации имитационных моделей

В производстве понятие технология включает в себя совокупность производственных процессов и операций, с помощью которых создаются определенные виды изделий, а также определяются способы производства.

С учетом того, что имитационные модели (ИМ) и реализующие их программы для ЭВМ также являются изделиями, создаваемыми коллективами специалистов разной квалификации с применением трудовых затрат, то актуальной становится задача создания современной технологии производства таких изделий. Технология проектирования ИМ включает в себя методы и средства, обеспечивающие их создание и развитие в течение всего периода жизни. Этот период включает этапы проектирования, изготовления и эксплуатации ИМ. Он начинается с формирования назначения и принципов построения ИМ и завершается после прекращения эксплуатации модели.

Проектирование сложной системы представляет собой трудоемкий процесс, в котором участвуют разные специалисты. На всех этапах проектирования специалистам приходится рассматривать две стороны объекта проектирования: требования к системе со стороны внешней среды (внешнее проектирование) и организацию ее функционирования (внутреннее проектирование).

Независимо от типа объекта и целей, преследуемых при создании модели, можно выделить следующие *этапы разработки и эксплуатации имитационных моделей*:

- *описание объекта моделирования*, задание границ и ограничений моделирования, выбор показателей для оценивания эффективности функционирования системы (составление содержательного описания объекта моделирования);

- *формулировка целей и задач*, которые должны решаться с помощью модели, переход от реальной системы к логической структурной схеме ее функционирования (составление концептуальной модели объекта);

- *описание компонент объекта* с использованием математических моделей, алгоритмов, задание функциональных соотношений для ее компонент (описания объекта);
- *разработка полного формализованного описания объекта*, реализуемого в имитационной модели (построение математической модели);
- *программирование и отладка программы* (программирование модели);
- *проверка модели, оценка ее свойств* (испытание и исследование модели);
- *организация модельных экспериментов на ЭВМ* (эксплуатация модели);
- *интерпретация результатов моделирования* и их использование для анализа работы объекта или проектирования (анализ результатов).

Составление содержательного описания объекта моделирования предполагает знакомство с исходной технической информацией, описывающей особенности его функционирования. Здесь также составляется список ограничений, налагаемых на модель, которые нужно учитывать при ее построении. Результатом работ на данном этапе является содержательное описание объекта моделирования с указанием целей и задач, которые достигаются при функционировании объекта моделирования и которые необходимо учитывать при моделировании.

Построение концептуальной модели предполагает формулировку общей цели моделирования. Здесь формулируются допущения, которые применяются при построении имитационной модели. В результате содержательного описания уточняется задача моделирования, определяются переходы к решению. Уточняется методика имитационного эксперимента с учетом имеющихся ресурсов. Общая задача моделирования разбивается на частные подзадачи.

Осуществляется выбор методов обработки и анализа результатов, выбираются способы представления ожидаемых результатов моделирования. *Результатом выполненных работ являются концептуальная модель, в состав которой входят:*

- уточненное содержательное описание объекта моделирования;
- список параметров и переменных, используемых для моделирования;
- критерии эффективности функционирования реальных вариантов исследуемой системы;
- методы, используемые для обработки результатов моделирования.

Составление формального описания объекта моделирования представляет собой разработку его математической модели. Целью здесь является получение формализованного описания компонент сложной системы и задание взаимодействий между ними. Для описания компонент моделей могут использоваться уравнения и системы уравнений, функциональные соотношения, алгоритмическое описание процессов в

системе, а также смешанное представление с использованием уравнений, формул и алгоритмов.

На этапе разработки программы (компьютерной модели) объекта выполняется выбор инструментальных средств, задание технических параметров, определение используемого языка программирования. Здесь в качестве технического задания выступает описание ИМ.

Разработка ИМ предполагает представление объекта с помощью универсальных средств описания как агрегированного комплекса. При этом выполняются:

- декомпозиция объекта на составляющие (блоки) и описание отдельных блоков модели;
- синхронизация взаимодействия компонент модели друг с другом с учетом единого модельного времени;
- организация сбора статистических данных, описывающих отдельные подсистемы и элементы;
- задание начальных условий параметров и функциональных отношений для моделирования;
- планирование процесса имитации различных режимов функционирования системы;
- обработка результатов моделирования.

Для проверки адекватности модели объекту исследования могут проводиться натурные эксперименты с использованием прототипа системы. В случае отсутствия прототипа, можно использовать систему вложенных ИМ, отличающихся друг от друга степенью детализации имитации одних и тех же процессов. При этом точная модель может служить в качестве прототипа.

На этапе испытания модели проверяется правильность выполнения алгоритма, используемого для моделирования объекта исследования, путем имитации его функционирования (проводится верификация модели). Здесь же оценивается степень адекватности модели и объекта исследования, точность воспроизведения моделью характеристик поведения объекта.

При недостаточной адекватности выполняется калибровка ИМ (корректировка и уточнение алгоритмов описания отдельных компонент модели). Калибровка предполагает анализ сделанных допущений, проверку возможности используемого упрощенного описания физических явлений, с разных сторон влияющих на функционирование системы. Здесь возможен возврат к этапу формализации системы, возможен даже повтор этапа составления концептуальной модели, с учетом новой информации об объекте и опыта.

На этапе исследования свойств ИМ оценивается точность моделирования, устойчивость результатов моделирования, чувствительность критериев качества к изменению параметров модели. Получить эти оценки часто бывает сложно. Однако, они необходимы для гарантированного достижения требуемых результатов имитационного моделирования.

Оценка чувствительности ИМ сводится к определению приращения выбранного критерия качества, статистической оценке характеристик при варьировании параметров моделирования на всем возможном диапазоне их изменений.

Эксплуатация ИМ предполагает описание плана эксперимента, позволяющего получить необходимую информацию об объекте. При планировании эксперимента определяется число и условия проведения опытов, необходимых для решения поставленной задачи. Здесь необходимо обеспечить:

- снижение числа опытов при сохранении возможности варьирования всеми переменными;
- использование математического аппарата планирования эксперимента;
- формулировку правил, позволяющих принимать обоснованные решения после каждой серии экспериментов на модели.

Выполнение всех перечисленных итерационных этапов должно позволять выполнить оценку возможности использования результатов моделирования для исследования поведения рассматриваемого объекта или системы, либо наоборот, приводить к необходимости разработки новой ИМ, так как имеющаяся не способна решить возникшие в рассматриваемой предметной области задачи.

Тестирование имитационных моделей

Развитие имитационного моделирования и рост его возможностей стимулирует разработку строгих стандартов и методов оценки степени достоверности и области применения создаваемых моделей. Это становится особенно актуальным при разработке образцов новой техники, совершенствовании технологических процессов, принятии управленческих решений. В условиях сжатых сроков, этапы разработки и производства новой техники и внедрения новых технологий приходится выполнять практически одновременно. В связи с этим возникает необходимость принятия максимально эффективных инженерных и проектных решений еще на самой начальной стадии работ.

После компьютерной реализации ИМ, выполняется процедура ее испытания и проверки. Данная процедура является важным этапом имитационного моделирования, так как выполненная недостаточно тщательно проверка может приводить к ошибочным оценкам функционирования объекта, принятию неверных решений. Это следует из того, что моделирование всегда ориентировано на решение реальных практических задач. Поэтому необходимо быть уверенным в том, что конечные результаты моделирования с контролируемой точностью отражают поведение объекта, и не являются ошибочными, и дают возможность оценить, насколько модель и данные, полученные с ее использованием, будут

полезны для принятия решений с учетом достигаемой точности при использовании разработанной модели.

В практике имитационного моделирования сложились методолого-технологические подходы к оценке достоверности имитационных моделей, которые рассматриваются как их важный этап. Это следует из того, что имитационное моделирование должно обеспечивать проектировщиков и исследователей сложных объектов формализованными средствами, описывающими их функционирование. Поэтому ошибки, допущенные при проектировании таких объектов, могут приводить к финансовым потерям, аварийным ситуациям при испытании и эксплуатации.

Согласно этим стандартам, оценка достоверности выполняется как многоэтапный итерационный процесс проверки правильности и корректности выводов (достижения необходимого уровня уверенности в правильности выводов) относительно поведения исследуемой или проектируемой ИМ.

На практике обычно выделяют три основных этапа оценки:

1. *Оценка адекватности* или *валидация модели*, которая предполагает проверку соответствия между поведением ИМ и исследуемого реального объекта. Валидация модели есть подтверждение того, что модель в пределах рассматриваемой области приложений ведет себя по сравнению с исследуемым объектом с удовлетворительной точностью и соответствует целям моделирования.

2. *Верификация модели*, которая предполагает проверку на соответствие поведения модели тем целям и задачам, которые были сформулированы на этапе ее проектирования. Процедура верификации выполняется для того, чтобы убедиться, что модель ведет себя так, как это было задумано. Для этого проводятся формальные и неформальные исследования ИМ. Верификация имитационной модели предполагает доказательство возможности использования разработанной компьютерной модели в качестве отображения концептуальной (математической) модели. Целью процедуры верификации является определение уровня имеющегося сходства, или оценка возможности достижения сходства.

Валидация и верификация ИМ напрямую связаны с оценкой внутренней структуры модели. В ходе этих процедур проводятся оценки возможности использования принятой внутренней структуры и ее описания, обоснованности принятых допущений, исследуется внутренняя состоятельность модели.

3. *Валидация данных*, которая должна обеспечивать подтверждение того, что все используемые в модели данные, и в первую очередь входные, имеют удовлетворительную точность, не противоречат исследуемому объекту, а найденные в результате расчетов значения параметров определены в пределах допустимой точности и корректно используются.

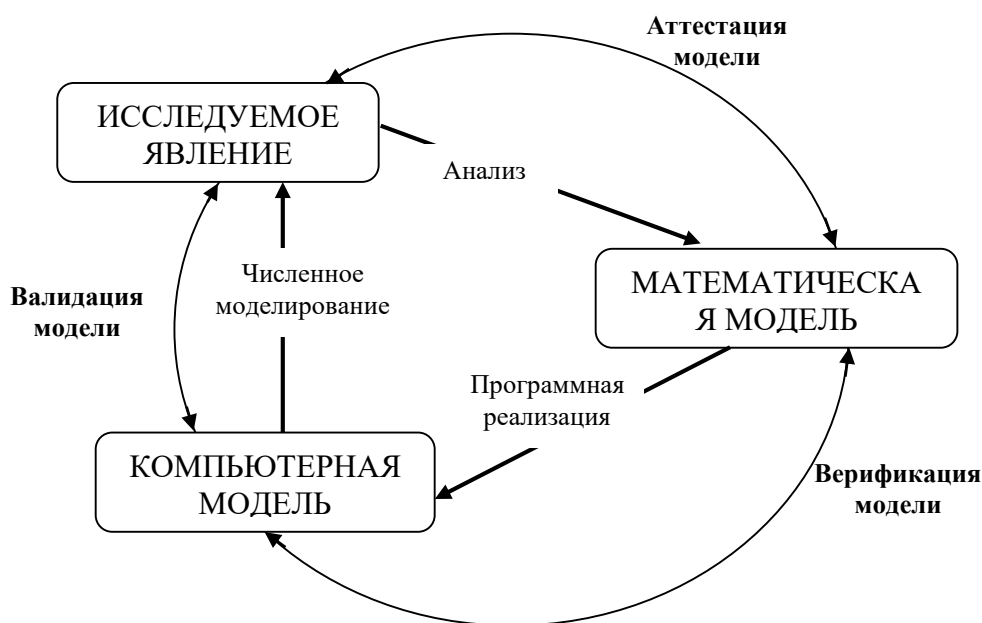
Все перечисленные этапы являются необходимыми и важными для тестирования ИМ. При этом основным инструментарием тестирования

моделей являются верификация и валидация, которые применяются для оценки точности, надежности и достоверности вычислительных моделей, а также корректности их программных реализаций.

Существующие национальные стандарты Российской Федерации по верификации и валидации численных методов, программного обеспечения и результатов моделирования вначале разрабатывались на основе официального перевода международных аналогов, отражающих зарубежный опыт. Однако, в последние годы Федеральным агентством по техническому регулированию и метрологии стали разрабатываться отечественные стандарты в области численного моделирования. Данные документы включают постановки тестовых задач с точными аналитическими решениями или условно эталонными численными решениями, покрывающими широкий спектр режимов работы различных устройств.

Схематически процессы верификации и валидации, включающие как вычислительные, так и физические аспекты, представлены на **рис. 1**. Данный рисунок иллюстрирует место рассматриваемых процедур при реализации единой стратегии оценки достоверности ИМ при их тестировании. Достоверность моделирования подтверждается на основании оценки соответствия выбранной концептуальной модели реальному явлению и сравнения результатов моделирования с экспериментальными данными.

При этом проверка адекватности математической модели может подразумевать оценку сходимости численных решений к точным аналитическим решениям, если они для рассматриваемого объекта существует, и оценку чувствительности алгоритма, реализующего модель, при изменении исходных данных и параметров, характеризующих рассматриваемый объект.



**Рис. 1. Роль верификации и валидации
в процессе тестирования имитационных моделей**

На **рис. 1** отражены две модели – математическая и компьютерная. Математическая модель содержит исходных данные, используемые для моделирования, и описывается уравнениями, соответствующими наблюдаемым в рассматриваемом объекте процессам и явлениям.

Математическая модель обычно строится по результатам наблюдений за функционированием рассматриваемого физического объекта. Компьютерная модель представляет собой исполняемую программу, реализующую принятое математическое описание исследуемого объекта (математическую модель).

Как следует из **рис. 1**, верификация, в частности, устанавливает наличие соответствия между математической и компьютерной моделями. Валидация позволяет определять степень соответствия между компьютерной моделью и исследуемым объектом, явлением или процессом. Можно сказать, что верификация и валидация являются инструментами для оценки точности разрабатываемых математических и компьютерных моделей соответственно. *Основными задачами верификации и валидации являются количественное определение степени достоверности моделей и меры доверия к ним.* Аттестация предполагает подтверждение возможности использования математической модели для решения задач из области ее предполагаемого практического применения.

Лекция 5. Элементы теории графов

Графы применяют для построения сетевых имитационных моделей, распределенных во времени или в пространстве объектов. Элементы теории графов применяются в различных приложениях при формализованном описании исследуемых сложных систем и процессов.

Граф G представляет собой геометрический объект, состоящий из точек, называемых **вершинами**, и соединяющих их линий, которые называют **ребрами** (**рис. 1.6**). Если какое-либо ребро a соединяет вершины x и y , то говорят, что вершины x и y **смежные**. При этом говорят, что ребро a **инцидентно** вершинам x, y , а вершины x, y **инцидентны** ребру a . Вершина графа называется **изолированной**, если к ней не подходит ни одно ребро. Ребра графа могут иметь ориентацию, которая отмечается стрелкой. Ориентированные ребра называют **дугами**.

Граф называется **ориентированным**, если он не имеет неориентированных ребер, и **неориентированным**, если он не имеет дуг.

Неориентированный граф называется **графом без петель**, если в нем нет петель – ребер, которые начинаются и заканчиваются в одной и той же вершине.

Граф, имеющий ребра любых видов, называется **смешанным**.

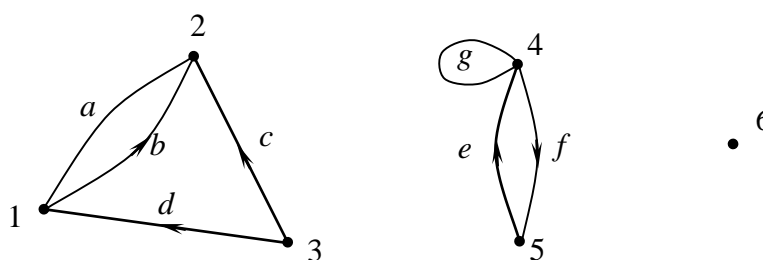


Рис. 1.6. Примеры изображения графа

Способы представления графов:

1. **Графическое задание.** Наглядной формой представления графа является его изображение в виде рисунка. На рисунке вершины обозначаются точками, а ребра – линиями, соединяющими соответствующие ребру вершины. Для дуг на линии указывается стрелка, указывающая от какой вершины в какую ведет дуга. Расположение вершин на рисунке не имеет значения, так же как и геометрическая форма линий. Однако, всегда следует стремиться изображать граф так, чтобы его графическое представление было наглядным. Возможный вариант изображения графа иллюстрирует **рис. 1.6**.

На **рис. 1.6** ребро g – петля, вершина 6 изолированная, так как к ней не подходит ни одно из ребер. Изображенный на **рис. 1.6** граф является смешанным. В конкретных задачах смешанные графы используются редко. Обычно они либо ориентированные, либо неориентированные.

2. **Задание матрицей инциденций.** Пусть n – число вершин, m – число ребер. Матрица инциденций графа $C = (c_{ij})$ размером $m \times n$ определяется так, что ее строки соответствуют ребрам, а столбцы – вершинам. Если a неориентированное ребро между вершинами i, j , то полагается $c_{ij} = c_{ji} = 1$, если a – дуга, ориентированная из i в j , то $c_{ij} = 1$, $c_{ji} = -1$, если a – петля, а c_{ij} – инцидентная ей вершина, то $c_{ij} = k$, где k – любое число, отличное от 0, 1 и -1 .

Матрицу инциденций в приложениях называют **матрицей соединений или узловой матрицей**.

Матрицы инциденций для графов, изображенных на **рис. 1.7** а) и б), соответственно имеют вид:

$$C = \begin{array}{c|ccccc} & a & b & c & d & e & f \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & & & \\ 2 & 1 & & & 1 & 1 & \\ 3 & & 1 & 1 & 1 & & \\ 4 & & & & & 1 & 4 \end{array}, \quad C = \begin{array}{c|ccccc} & a & b & c & d & e \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 & & \\ 2 & -1 & & & 1 & -1 \\ 3 & & -1 & 1 & -1 & \\ 4 & & & & & 1 \end{array}.$$

Заметим, что в случае, когда G – ориентированный граф, сумма элементов всех строк (столбцов) матрицы равна нулю. Пусть G – неориентированный граф. **Маршрутом** на графе называют чередующуюся последовательность вершин и ребер, начинающуюся и заканчивающуюся вершиной, в которой любые рядом стоящие вершина и ребро инцидентны друг другу. С каждым маршрутом связан определенный обход графа. При выходе из первой вершины маршрута следующие вершины и ребра проходятся в нем в том порядке, в котором они указаны в маршруте. Часто, если это не ведет к неоднозначности, маршрут описывается в сокращенном виде. При этом в его записи остаются либо только вершины, либо только ребра.

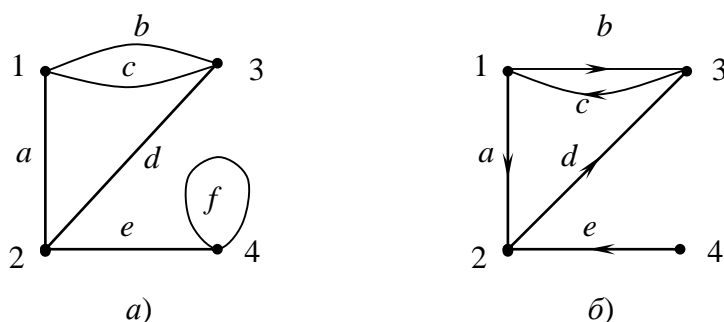


Рис. 1.7. Графы

Маршрут называется **циклическим**, если в нем первая и последняя вершины совпадают. Маршрут называется **цепью**, если он не содержит повторяющихся ребер. Циклическую цепь называют просто **циклом**. Маршрут называется **простым**, если в нем все вершины разные, кроме, может быть, последней и первой. Простой циклический маршрут называется **простым маршрутом**.

Две вершины неориентированного графа называются **связными**, если имеется цепь, начинающаяся в одной из этих вершин и оканчивающаяся в другой.

Для графа, показанного на **рис. 1.8** маршрут – $1a2b3b2e4g5c2$ не является цепью; $1a2b3b2e4g5c2e4f1$ – циклический маршрут, не являющийся цепью; $1a2e4f1h6i5$ – путь, не являющийся простым путем; $1a2b3d5c2e4f1$ –

цикл не являющаяся простым циклом; $1a2e4g5d3$ – простой путь; $1a2b3d5g4f1$ – простой цикл.

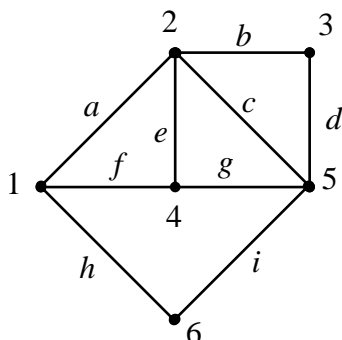


Рис. 1.8. Примеры маршрутов

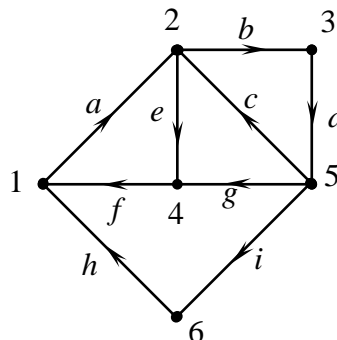


Рис. 1.9. Примеры маршрутов

Пусть теперь G ориентированный граф. В этом случае каждому маршруту соответствует определенное его прохождение с учетом ориентации дуг. Если все дуги маршрута проходятся в направлении стрелок ориентации ребер, то такой маршрут называется **ориентированным**.

Если ориентированный маршрут является циклическим, то он называется **циклическим** ориентированным маршрутом. Ориентированная цепь называется **путем**, а ориентированный цикл – **контуром**. Ориентированная простая цепь называется **простым путем**, а ориентированный простой цикл – **простым контуром**.

Если все вершины графа являются связными, то сам граф называется **связным**.

Для графа на **рис. 1.9** имеем: $1a2b3d5c2e4f1a2$ – ориентированный маршрут, не являющийся путем; $1a2b3d5c2b3d5g4+1$ – ориентированный циклический маршрут, не являющийся контуром; $1a2b3d5c2e4$ – путь не являющийся простым путем; $1a2b3d5c2e4f1$ – контур не являющийся простым; $1a2b3d5g4$ – простой путь; $1a2b3d5i6h1$ – простой контур.

Деревом связного графа называется его связный подграф, который содержит все вершины графа, но не содержит ни одного контура.

Дополнением дерева графа называется множество его ветвей, которое получается после исключения из графа всех ветвей дерева. Отдельные ветви дополнения дерева называются **ветвями связи**.

Рассмотрим граф на **рис. 1.10**. Тогда, например, деревом графа является подграф, включающий ветви c, d, f .

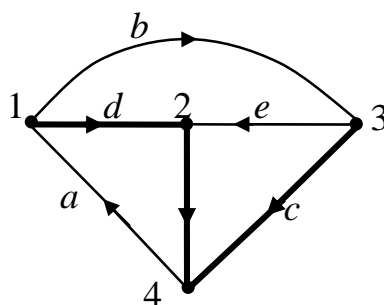


Рис. 1.10. Дерево графа

Дополнением графа служит множество ветвей a, b, e , которые являются ветвями связи.

Сечением графа называется множество его ветвей, исключение которых разделяет граф на два связных подграфа, одним из которых может быть изолированный узел, причем последующее добавление любой из них превращает граф в связный.

Сечение называется **главным**, если оно содержит только одну ветвь дерева, а остальные его ветви являются ветвями связи.

Простейшим примером сечений являются такие сечения, каждое из которых превращает одну из вершин графа в изолированную.

Контур называется **главным**, если он содержит только одну ветвь связи, а остальные ветви являются ветвями дерева.

Рассмотрим один из простых контуров графа (l_i). Выберем направление его обхода против или по часовой стрелке.

Матрица $B = (b_{ik})$ называется **контурной матрицей**, если ее строки соответствуют контурам (l_i), столбцы ветвям и при этом

$$b_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } k - \text{я ветвь принадлежит } i - \text{му контуру и по направлению} \\ & \text{совпадает с направлением его обхода;} \\ -1, & \text{если } k - \text{я ветвь принадлежит } i - \text{му контуру и совпадает} \\ & \text{с направлением противоположным его обхода;} \\ 0, & \text{не принадлежит.} \end{cases}$$

3. Список ребер. При данном способе задания графа отношение инцидентности задается списком ребер графа. При этом каждая строка списка соответствует ребру, и в ней записаны номера вершин, ему инцидентных. Для неориентированного графа порядок вершин в строке произвольный, для ориентированного – первым стоит номер или другое наименование начала дуги, вторым – ее конца.

Список ребер для графов, изображенных на рис. 1.8 и 1.9 имеет вид:

ребра	вершины	дуги	вершины
a	1,2	a	1,2

<i>b</i>	2,3	<i>b</i>	2,3
<i>c</i>	2,5	<i>c</i>	5,2
<i>d</i>	3,5	<i>d</i>	3,5
<i>e</i>	2,4	<i>e</i>	2,4
<i>f</i>	1,4	<i>f</i>	4,1
<i>g</i>	4,5	<i>g</i>	5,4
<i>h</i>	1,6	<i>h</i>	6,1
<i>i</i>	5,6	<i>i</i>	5,6

По списку ребер графа легко построить его матрицу инцидентий. Каждая строка списка соответствует строке матрицы с тем же номером. Для неориентированного графа в строке списка указаны номера элементов строки матрицы инцидентий, равные 1, а для ориентированного графа в этой строке первым стоит номер элемента строки, равный -1, вторым - номер элемента, равный 1.

4. Матрица смежности графа. Это квадратная матрица, столбцам и строкам которой соответствуют вершины графа. Для неориентированного графа каждый элемент матрицы равен количеству ребер, инцидентных i -й и j -й вершинам, а для ориентированного графа каждый элемент равен количеству ребер, с началом в i -той вершине и концом в j -той.

Матрицы смежности, соответствующие графам, изображенным на рис. 1.8 и 1.9 имеют вид:

	1	2	3	4	5	6
1		1		1		1
2	1		1	1	1	
3		1			1	
4	1	1			1	
5		1	1	1		1
6	1				1	

	1	2	3	4	5	6
1		1				
2			1	1		
3					1	
4	1					
5		1		1		1
6	1					

По матрице смежности легко строится список ребер, определяющий граф, а, соответственно, и матрица инцидентий.

Задача: В качестве системы рассматривается работа посреднической мелкооптовой фирмы. Предполагается, что система может находиться только в одном из своих состояний:

- S_0 — регистрация нового клиента,
- S_1 — получение заказа на поставку товара,
- S_2 — поиск и приобретение нужного товара,
- S_3 — товар на складе фирмы,
- S_4 — реализация товара клиенту,

- S_5 — возврат клиентом на склад некачественного товара,
 S_6 — устранение дефекта в мастерской и возврат на склад,
 S_7 — списание в убыток (невозможность ремонта),
 S_8 — хищение со склада.

Построить граф состояний системы, матрицу инцидентий, список ребер и матрицу смежности.

В следующих лекциях мы рассмотрим примеры применения графов при построения имитационных моделей производственных процессов.

Лекция 6. Имитационные модели технических и социально-экономических систем

Балансовые статические модели

Балансовые модели исследуемого объекта описываются нелинейными или линейными алгебраическими уравнениями относительно переменных состояния $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ вида:

$$F(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \quad A\bar{x} = \bar{y},$$

где \bar{y} — вектор входных воздействий; $F(\bar{x}, \bar{y})$, A — заданные вектор-функция и матрица.

Рассмотрим на конкретных примерах подходы к построению балансовых моделей.

Балансовая модель Леонтьева

Пусть имеется n отраслей промышленности, каждая из которых производит свою однородную продукцию. При этом, для обеспечения производства, каждая отрасль нуждается в своей продукции и продукции других отраслей. Оставшаяся часть продукции, не потребленная отраслями, идет на личное и общественное потребление вне отраслевой сферы производственной деятельности.

Будем рассматривать процесс производства в течение некоторого отрезка времени, например, года. Введем следующие обозначения:

- 1) x_i — общий объем выпуска продукции i -й отрасли за год или валовой отраслевой продукт ($i = \overline{1, n}$);
- 2) x_{ij} — объем продукции i -й отрасли, потребляемый j -й отраслью при производстве продукции в объеме x_i , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$;
- 3) y_j — объем продукции j -й отрасли, реализуемый (потребляемый) в непроизводственной среде (личное потребление граждан, удовлетворение общественных потребностей, содержание государственных институтов, экспорт и т.д.), $j = \overline{1, n}$.

Функционирование рассмотренной многоотраслевой экономики показано на **рис. 1**.

Будем считать, что суммарный объем продукции x_i любой i -ой отрасли полностью потребляется всеми отраслями, а также в непроизводственной сфере. Тогда выполняется следующее, так называемое, уравнение баланса:

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} + y_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1)$$

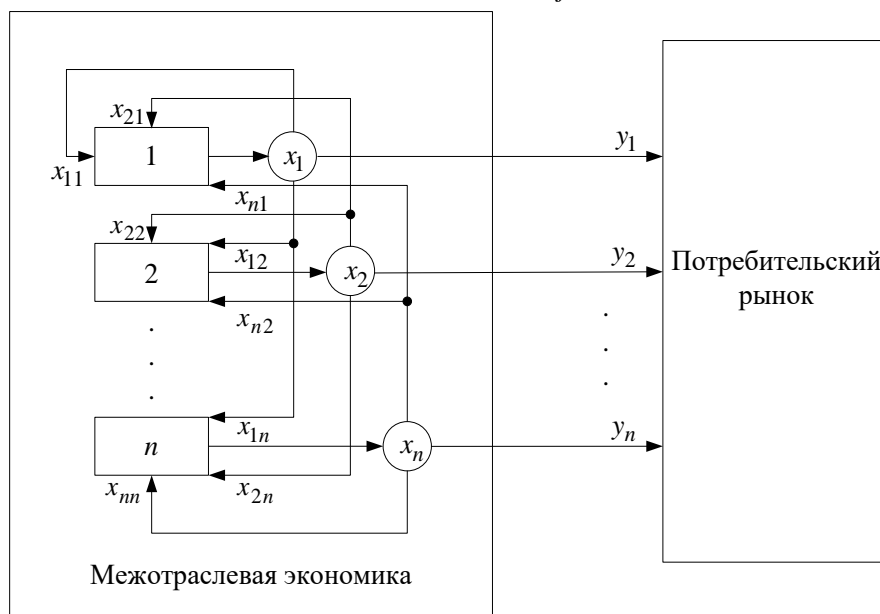


Рис. 1. Модель функционирования многоотраслевой экономики

В. Леонтьев, в результате анализа многоотраслевой экономики США, в период 30-х годов XX века установил, что отношения $\frac{x_{ij}}{x_j}$ меняются мало.

Поэтому будем считать, величины $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$ – постоянными числами.

При таком допущении получаем, что для производства продукции j -й отрасли в объеме x_j нужно использовать продукцию i -й отрасли в объеме

$$x_{ij} = a_{ij}x_j. \quad (2)$$

Технологии отраслевого производства, удовлетворяющие допущению (2), называют **линейными**, а числа a_{ij} – **коэффициентами прямых затрат**.

Учитывая равенства (2), запишем систему

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + y_1, \\ x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + y_2 \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + y_n. \end{aligned} \quad (3)$$

Введем в рассмотрение вектор-столбец \bar{x} объемов произведенной продукции (валового отраслевого выпуска), а также вектор-столбец \bar{y} объемов продукции конечного потребления. Определим также матрицу A коэффициентов затрат. Тогда получим:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Используя правило умножения матрицы на столбец, запишем систему уравнений (3) в матричной форме:

$$\bar{x} = A\bar{x} + \bar{y}. \quad (4)$$

Соотношение (4) называют уравнением **линейного межотраслевого баланса**.

Уравнение (4) в формализованном виде описывает так называемую **модель Леонтьева**, которая может быть использована для решения двух основных задач.

Задача 1. При известном векторе валового выпуска \bar{x} требуется определить вектор \bar{y} конечного потребления.

Задача 2. Для планируемого периода времени (например, год) при известном конечном на рынке векторе потреблений \bar{y} необходимо определить вектор \bar{x} валового выпуска.

Матрица A прямых затрат называется **продуктивной**, если для любого вектора \bar{y} с неотрицательными элементами ($y_i \geq 0$) существует решение уравнения (4) – вектор \bar{x} , элементы которого неотрицательны ($x_i \geq 0$). Соответствующая этому случаю **модель Леонтьева** называется **продуктивной**.

Существует несколько критериев продуктивности матрицы A , например:

1. Матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $(E - A)^{-1}$ существует и ее элементы неотрицательны.

2. Матрица A продуктивна, если ее элементы неотрицательны, а сумма элементов по любому столбцу или строке не превосходит единицы, то есть

$$a_{ij} \geq 0; i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n};$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \leq 1, j = \overline{1, n}; \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \leq 1, i = \overline{1, n}. \quad (6)$$

При этом хотя бы для одного i (или j) сумма (5) и (6) строго меньше единицы.

Пусть A – продуктивная матрица. Перепишем систему (4) в виде

$$\bar{y} = \bar{x} - A\bar{x} = E\bar{x} - A\bar{x} = (E - A)\bar{x}. \quad (7)$$

Тогда формула (7) дает искомое решение задачи 1.

Решение задачи 2 с учетом равенства (7) записывается в виде:

$$\bar{x} = (E - A)^{-1} \bar{y}. \quad (8)$$

Матрица $s = (E - A)^{-1}$ называется **матрицей полных затрат**.

Пример 1. В таблице приведены значения результатов выпуска и потребления в двух отраслях экономики (энергетика, машиностроение).

№	Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовый выпуск
		Э	М		
1	Энергетика (Э)	7	21	72	100
2	Машиностроение (М)	12	15	123	150

Определить необходимый объем валового выпуска продукции каждой отрасли, если конечное потребление энергетической отрасли увеличится вдвое, а машиностроительной сохранится на прежнем уровне.

Имеем: $x_1 = 100$; $x_2 = 150$; $x_{11} = 7$; $x_{12} = 21$; $x_{21} = 12$; $x_{22} = 15$; $y_1 = 72$; $y_2 = 123$. Находим по формуле (8): $a_{11} = 0,07$; $a_{12} = 0,14$; $a_{21} = 0,12$; $a_{22} = 0,1$, то есть

$$A = \begin{pmatrix} 0,07 & 0,14 \\ 0,12 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы A неотрицательные. При этом выполняется условие:

$$\max \{0,07 + 0,12; 0,14 + 0,1\} = \max \{0,19; 0,24\} = 0,24 < 1.$$

Поэтому критерий 2 продуктивности выполняется.

Для нового конечного потребления имеем

$$\bar{y} = (2 \cdot 72; 123)^T = (144; 123)^T,$$

необходимый объем выпуска равен $\bar{x} = (E - A)^{-1} \bar{y}$. Поэтому находим:

$$(E - A) = \begin{pmatrix} 0,93 & -0,14 \\ -0,12 & 0,9 \end{pmatrix};$$

$$\det(E - A) = 0,8202;$$

$$s = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0,8202} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,14 \\ 0,12 & 0,93 \end{pmatrix};$$

$$\bar{x} = \frac{1}{0,8202} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,14 \\ 0,12 & 0,93 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 144 \\ 123 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 179 \\ 160,5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, валовой выпуск в энергетике следует увеличить до 179 усл. ед. продукции, а в машиностроении – до 160,5 усл. ед. продукции.

Рассмотрим межотраслевую экономику. Пусть, как и ранее: A – матрица прямых затрат порядка n ; $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – вектор валового отраслевого выпуска. Обозначим через $\bar{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ – вектор цен, k -я координата которого p_k равна цене единицы продукции k -й отрасли. Тогда при выпуске x_k единицы продукции k -я отрасль получит валовой доход, равный $R_k = p_k x_k$, $k = \overline{1, n}$. Часть этого дохода будет израсходована на

Отсюда следует, что решение системы существует, если матрица является продуктивной (матрица $(E - A)^{-1}$ существует и ее элементы не отрицательны).

Уравнение (15) описывает, так называемую, **модель равновесных цен**. Данная модель позволяет решить две задачи:

Задача 1. При известных нормах добавленных стоимостей V_k , прогнозировать цены на продукцию отраслей p_k , $k = \overline{1, n}$.

Задача 2. Спрогнозировать изменение цен во всех отраслях и инфляцию, возникшие в результате изменения цены в одной из отраслей.

Пример 2. Рассмотрим двухотраслевую экономику **примера 1**. Пусть $\bar{v} = (20; 30)^T$ – заданный вектор норм добавочной стоимости. Найдем равновесные цены, используя формулу (15). Для матрицы S из **примера 1** получаем

$$S^T = \frac{1}{0,8202} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,12 \\ 0,14 & 0,13 \end{pmatrix}.$$

При этом вектор цен равен

$$\bar{p} = S^T \bar{v} = \frac{1}{0,8202} \begin{pmatrix} 54 \\ 30,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65,8 \\ 37,4 \end{pmatrix}.$$

Предположим теперь, что норма добавленной стоимости в первой отрасли возросла на 10%, то есть стала равной $v_1 = 22$. Для нового вектора добавленной стоимости $\bar{v}' = (22; 30)^T$, находим равновесные цены в этих условиях:

$$\bar{p} = S^T \bar{v}' = \frac{1}{0,8202} \begin{pmatrix} 55,8 \\ 30,98 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 \\ 37,8 \end{pmatrix}.$$

Лекция 7. Сетевые имитационные модели производственных процессов

При планировании и оперативном управлении сложными комплексами работ, объединенных общей целью, часто используют их графические модели – сетевые графики (сети), представляющими собой ориентированные связанные графы без петель и контуров.

В дальнейшем любые действия (производственные процессы), сопровождающиеся затратами ресурсов или времени и приводящие к определенным результатам, будем называть **работами**. Результат завершения одной или нескольких работ – **событием**.

Поставим в соответствие каждой работе ориентированное ребро на графе, а каждому событию – вершину так, чтобы ребру (i, j) соответствовала работа, начинающаяся после наступления события i и завершающаяся при достижении события j . Каждому ребру присвоим числовые характеристики, в качестве которых могут служить: время выполнения работы, расход

материальных ресурсов, количество исполнителей и т.д., то есть любые необходимые ресурсы.

При построении сети будем соблюдать следующие правила:

1. Одну вершину в сети, соответствующую началу всех работ, будем называть истоком I , а вершину, соответствующую завершению всех работ, – **стоком** S .

2. Каждая работа отражается в сети одним и только одним ребром.

3. Ни одна пара работ, выполняемых одновременно, не должна отображаться на сети параллельными ребрами.

При наличии таких работ следует ввести дополнительные события и фиктивные работы нулевой продолжительности, которые в сети будем отображать ребрами в виде штрихованной линии.

Пример 1. Пусть работы A, B выполняются одновременно после наступления события i и завершаются событием j (рис. 2).

Недопустимым является следующее отражение этой ситуации

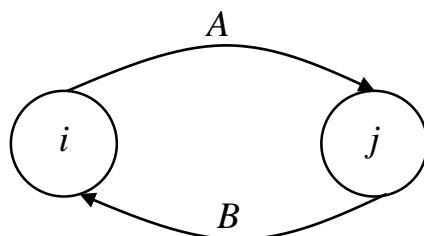


Рис. 2. Реализация работ A и B

Введя дополнительное событие s и фиктивную работу, отразим ситуацию на сети одним из способов (рис. 3).

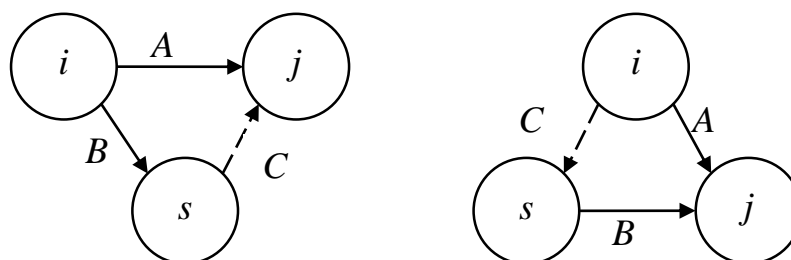


Рис. 3. Два способа введения фиктивной работы

Введение фиктивных работ позволяет, в соответствии с установленными правилами 2 и 3, отображать на сети все возможные ситуации, возникающие при совмещении разных работ, которые без их использования описать не удастся.

Пример 2. Пусть работы A, B непосредственно предшествуют работе C , а работе D непосредственно предшествует только работа B . Введя фиктивную работу E , отображаем эту ситуацию на сети так, как показано на рис. 4.

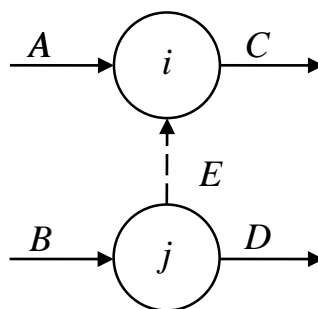


Рис. 4. Сетевой график работ

При построении сетевого графика необходимо установить порядок следования работ, т.е.:

- указать полный список всех выполняемых работ комплекса;
- выявить технологические связи каждой из работ с другими работами комплекса, то есть указать, какие работы следует завершить непосредственно до начала следующей работы;
- определить место каждой работы в комплексе, то есть указать конечные результаты (события) работы;
- задать ресурсное обеспечение по требуемому ресурсу (время, трудоемкость и т.д.) каждой работы.

Пример 3. Построить сеть по следующим данным:

Порядок выполнения работ

Работы	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
Непосредственные предшествующие работы	—	—	—	A_1	A_1, A_2	A_1, A_2	A_3, A_5	A_4, A_6, A_7	A_3, A_5
Продолжительность работы	3	6	4	5	1	9	6	8	5

На рис. 5 показаны сеть, соответствующая исходным данным, с использованием фиктивных работ.

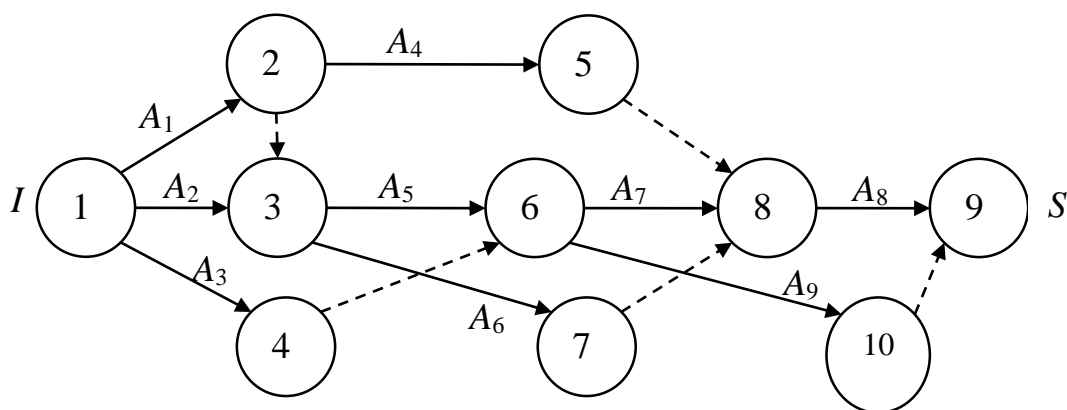


Рис. 5. Сеть по исходным данным

На рис. 6 показана преобразованная сеть, в которой часть фиктивных работ исключена.

Из рис. 5 и 6 следует, что одна и та же производственная ситуация может по-разному отображаться с помощью сети.

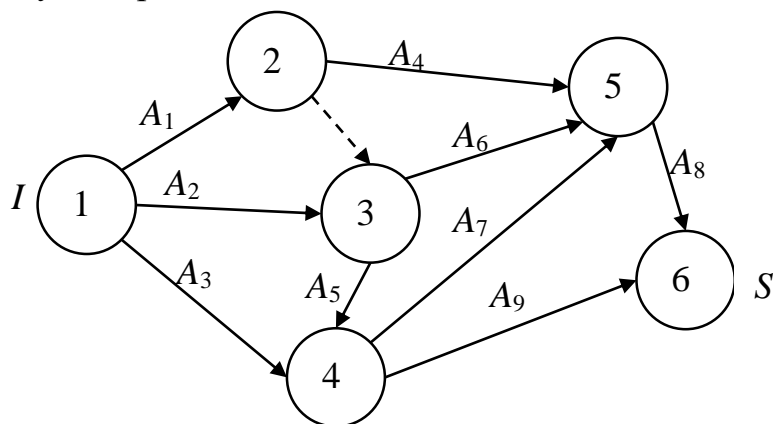


Рис. 6. Преобразованная сеть

Найдем все возможные полные пути L_1, \dots, L_m от I к S , тогда сумма продолжительностей всех работ, соответствующих ребрам пути L_k , называется **продолжительностью пути** L_k и обозначается $t(L_k)$.

Пример 4. Рассмотрим сеть (рис. 7), на ребрах которой указаны продолжительности соответствующих работ.

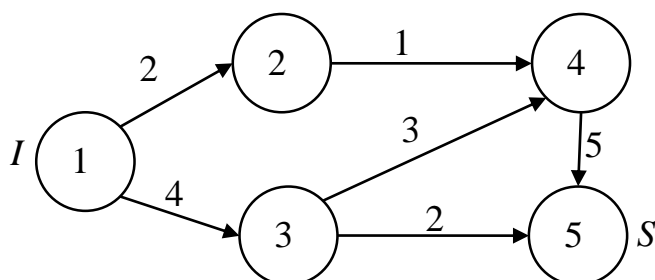


Рис. 7. Сетевой график работ

Имеем следующие полные пути:

$L_1: 1-2-4-5, t(L_1)=8;$

$L_2: 1-3-4-5, t(L_2)=12;$

$L_3: 1-3-5, t(L_3)=6.$

Наибольшую продолжительность из всех полных путей $L_i, i = \overline{1, m}$ называют **продолжительностью критического пути**, то есть, если L_k критический путь, то

$$t(L_k) = \max_{1 \leq i \leq m} t(L_i) \quad (16)$$

Так как все работы нужно последовательно выполнять в том порядке, как они встречаются в полных путях, то $t_{кр} = t(L_k)$ вида (16) есть

минимальное время выполнения всех работ комплекса. Это минимальное время называется **критическим сроком** и обозначается $t_{кр}$.

Пример 5. Для сети **рис. 6** значение $t_{кр} = 12$.

Работы и события, лежащие на критическом пути, называются **критическими**, а все другие работы и события – **некритическими**.

Отметим, что уменьшение срока выполнения всего комплекса работ возможно только за счет уменьшения срока выполнения критических работ. В тоже время, выполнение некритических работ можно, вообще говоря, продлить, например, начать позднее без увеличения срока выполнения всего комплекса работ. Последнее позволяет перераспределять выполнение некритических работ для улучшения установленного критерия качества (эффективности) организации производственного процесса.

Будем говорить, что событие i **свершилось** к данному моменту времени t , если к этому моменту завершены все входящие в вершину, соответствующую этому событию, работы на сети, и может быть начата любая выходящая работа. При этом **ранним сроком** $t_p(j)$ свершения события j называем момент времени, к которому завершаются все работы, предшествующие этому событию по любым путям от I до j .

Пример 6. Для сети **рис. 7** имеем

$$t_p(1) = t_p(I) = 0;$$

$$t_p(2) = 2 = 0 + 2 = t_p(1) + t(1,2),$$

где $t(1,2)$ – время выполнения работы (1,2);

$$t_p(3) = 4 = 0 + 4 = t_p(1) + t(1,3).$$

Событие 4 свершится при завершении двух последовательностей работ:

$$l_1 : 1 - 2 - 4 \Rightarrow t(l_1) = 2 + 1 = 3 = t_p(2) + t(2,4);$$

$$l_2 : 1 - 3 - 4 \Rightarrow t(l_2) = 4 + 3 = 7 = t_p(3) + t(3,4),$$

отсюда

$$t_p(4) = \max \{t_p(2) + t(2,4); t_p(3) + t(3,4)\} = 7.$$

Обобщая полученный результат, имеем для любого события j

$$t_p(j) = \max_{i, j: (i, j) \in U_j^+} \{t_p(i) + t(i, j)\}, \quad (17)$$

где U_j^+ – множество работ, входящих в вершину, соответствующую событию j на сети; $t_p(i)$ – ранний срок выполнения начального события работы (i, j) .

В дополнение к (17) заметим, что в любой сети

$$t_p(I) = 0, \quad t_p(S) = t_{кр}. \quad (18)$$

Для сети на **рис. 7** получаем $t_p(5) = t_{кр} = 12$ с учетом того, что:

$$t_p(5) = \max \{ t_p(4) + t(4,5), t_p(3) + t(3,5) \} = \max \{ 12; 6 \} = 12.$$

Поздним сроком $t_n(i)$ **свершения события** i называется момент времени, после которого остается равно столько времени, сколько нужно, чтобы завершить все следующие за событием i работы по любым возможным путям из i в S .

Пример 7. Для сети на рис. 6 имеем

$$t_n(5) = t_n(S) = t_{кр}.$$

Для любого стока имеем

$$t_n(S) = t_{кр}. \quad (19)$$

Для истока получаем

$$t_n(I) = 0. \quad (20)$$

Тогда $t_n(4) = t_{кр} - t(4,5) = t_n(5) - t(4,5) = 7$. Для события 3 имеем:

$$\text{а) по работе (3,5)} \quad t_{кр} - t(3,5) = t_n(5) - t(3,5) = 10;$$

$$\text{б) по работе (3,4)} \quad t_{кр} - t(3,4) - t(4,5) = t_n(4) - t(3,4) = 4.$$

Если в качестве $t_n(3)$ взять 10, то для завершения работ потребуется $10 + t(3,4) + t(4,5) = 18 > t_{кр}$. Поэтому в качестве $t_n(3)$ необходимо взять минимальное из двух значений $t_n(3) = \min \{ t_n(4) - t(3,4); t_n(5) - t(3,5) \} = 4$. Или, в общем виде

$$t_n(i) = \min_{j: (i,j) \in U_i^-} \{ t_n(j) - t(i,j) \}, \quad (21)$$

где U_i^- – множество работ, выходящих из события i на сети; $t_n(j)$ – поздний срок свершения конечного события j работы (i,j) .

При использовании формулы (21) необходимо двигаться от стока S к вершине I . Используя (21) находим:

$$t_n(2) = t_n(4) - t(2,4) = 7 - 1 = 6.$$

Резервом времени события i называют величину

$$R(i) = t_n(i) - t_p(i), \quad (22)$$

равную предельно допустимому времени, на которое можно задержать свершение события i без изменения срока наступления завершающего события S (общего срока выполнения всех работ комплекса).

Так как для каждого критического события i , лежащего на критическом пути $L_{кр}$, любая отсрочка выполнения события i приводит к увеличению общего срока выполнения работ, то

$$R(i) = 0, \quad t_p(i) = t_n(i), \quad i \in L_{кр}, \quad (23)$$

если i вершина критического пути.

Введем следующие обозначения:

$$1. \quad t_{рн}(i, j) = t_p(i) - \text{ранний срок начала работы } (i, j).$$

$$2. \quad t_{ро}(i, j) = t_p(i) + t(i, j) - \text{ранний срок окончания работы } (i, j).$$

3. $t_{\text{пн}}(i, j) = t_n(j) - t(i, j)$ – поздний срок начала работы (i, j) .

4. $t_{\text{по}}(i, j) = t_n(j)$ – поздний срок окончания работы (i, j) .

Максимальное время, на которое можно задержать начало работы (i, j) или увеличить ее продолжительность без увеличения критического срока, называется **полным резервом работы** (i, j) и обозначается $R_n(i, j)$.

Для любой работы (i, j) имеем следующее уравнение баланса:

$$t_n(j) - t_p(i) = t(i, j) + R_n(i, j),$$

отсюда

$$R_n(i, j) = t_n(j) - t_p(i) - t(i, j). \quad (24)$$

Время, на которое можно отсрочить начало работы (i, j) или увеличить ее продолжительность при условии, что ранние сроки всех последующих работ не изменятся, то есть весь комплекс работ завершится в критический срок, называется **свободным резервом работы** (i, j) и обозначается $R_c(i, j)$.

При этом

$$R_c(i, j) = t_p(j) - t_p(i) - t(i, j) \quad (25)$$

Формулы (24), (25) проиллюстрируем **рис. 8 и 9**, соответственно.

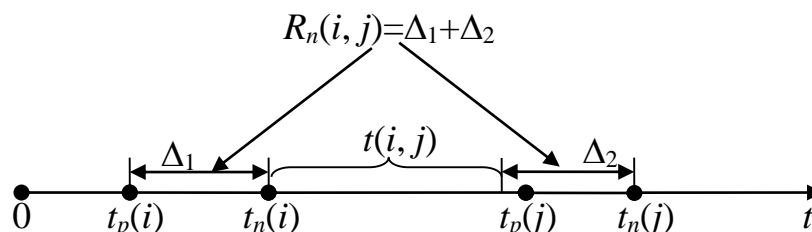


Рис. 8. Иллюстрация формулы (24)

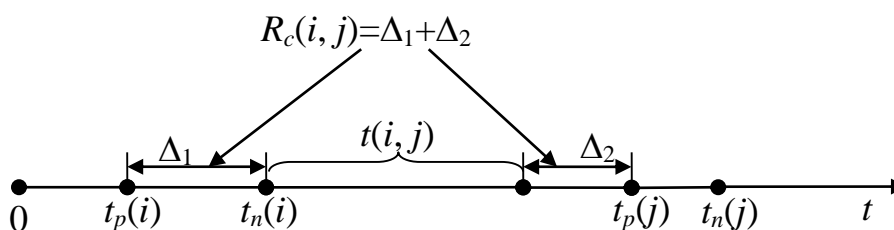


Рис. 9. Иллюстрация формулы (25)

Основные характеристики сетевого графика обычно отображаются непосредственно на сети. При этом каждая вершина сети делится на четыре части (сектора), в каждой из которых указываются: номер события i , $t_p(i)$, $t_n(i)$, $R(i)$. Такое представление иллюстрирует **рис. 10**.

При расчёте характеристик сети последовательно находят: $t_p(i)$, $t_n(i)$, $R(i)$, критический путь.

Пример 8. Рассмотрим сеть **рис. 6**, преобразовав ее с учетом введенных обозначений (**рис. 11**).

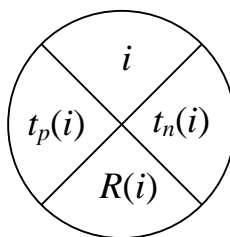


Рис. 10. Вершина сети с номерами событий

1. Двигаясь от истока I к стоку S , последовательно находим $t_p(i)$:

$$t_p(1) = t_p(I) = 0;$$

$$t_p(2) = t_p(1) + t(1;2) = 3;$$

$$t_p(3) = \max \{ t_p(2) + t(2;3); t_p(1) + t(1;3) \} = 6;$$

$$t_p(4) = \max \{ 6 + 1; 0 + 4 \} = 7;$$

$$t_p(5) = \max \{ 3 + 5; 6 + 9; 7 + 6 \} = 15;$$

$$t_p(6) = \max \{ 15 + 8; 7 + 5 \} = 23;$$

$$t_p(6) = t_p(S) = t_{кр} = 23.$$

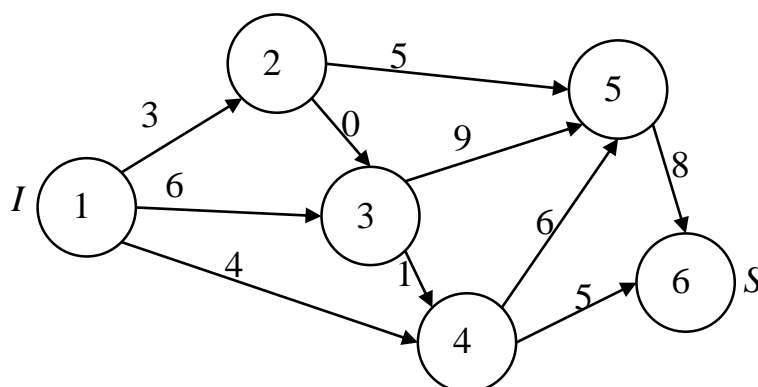


Рис. 11. Сетевой график

2. Перемещаясь от S к I , находим $t_n(i)$:

$$t_n(6) = t_n(S) = t_{кр} = 23;$$

$$t_n(5) = t_n(6) - t(5; 6) = 15;$$

$$t_n(4) = \min \{ t_n(6) - t(4; 6); t_n(5) - t(4; 5) \} = \{ 18; 9 \} = 9;$$

$$t_n(3) = \min \{ 15 - 9; 9 - 1 \} = 6;$$

$$t_n(2) = \min \{ 15 - 5; 6 - 0 \} = 6;$$

$$t_n(1) = \min \{ 6 - 3; 6 - 6; 9 - 4 \} = 0.$$

3. Находим резервы времени:

$$R(1) = 0; \quad R(2) = 6 - 3 = 3; \quad R(3) = 6 - 6 = 0; \quad R(4) = 9 - 7 = 2;$$

$$R(5) = 15 - 15 = 0; \quad R(6) = 23 - 23 = 0.$$

4. Строим сетевой график (рис. 12).

Для критических событий выполняется $R(i) = 0$. Это позволяет на сети указать критический путь (отмечен двойными стрелками на **рис. 12**).

Для вершин критического пути выполняются следующие условия:
 $t_p(i) = t_n(i)$; $t_p(j) = t_n(j)$; $t_n(j) - t_p(i) = t(i, j)$.

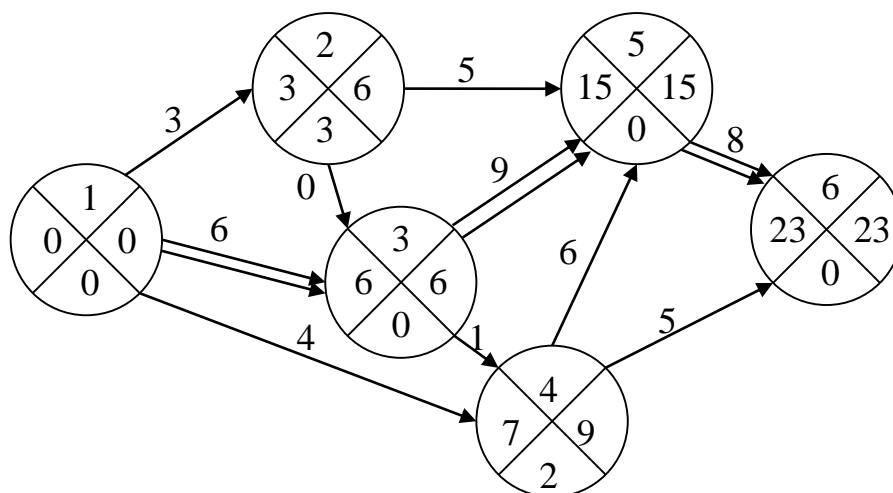


Рис. 12. Сетевой график

Линейным графиком комплекса работ называют графическое изображение всех работ в виде отрезков, совмещённых с осью времени Ot , над которыми указываются интенсивности потребления ресурсов при выполнении работ. При этом длина t_{ij} отрезка, соответствующего работе (i, j) , в выбранном масштабе принимается равной продолжительности выполнения работы (i, j) .

Пример 9. Построим линейный график для сети, показанный на **рис. 13**.

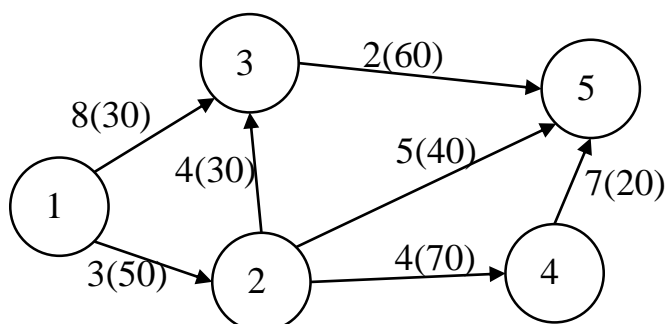


Рис. 13. Сеть

На каждом ребре сети на **рис. 13** указаны продолжительность t_{ij} работы (i, j) и r_{ij} — количество ресурса, необходимого для выполнения этой работы (в скобках).

Сначала построим сетевой график (**рис. 14**), соответствующий сети **рис. 13**.

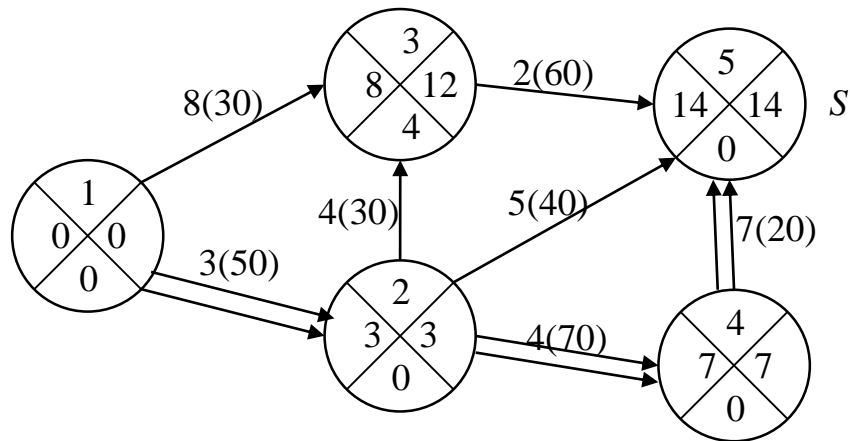


Рис. 14. Сетевой график, соответствующий сети на рис. 13

Теперь строим линейный график, указывая на нем ресурсы, потребляемые при выполнении работ (рис. 15).

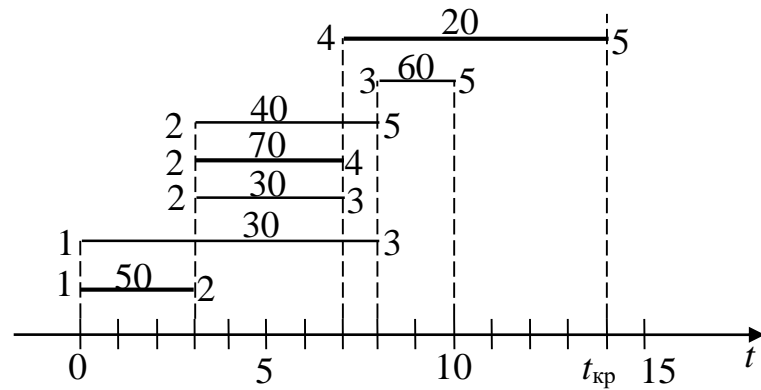


Рис. 15. Потребление ресурсов при выполнении работ

График потребляемых суммарных ресурсов приводится на рис. 16. На рис. 16 ресурсы в каждой точке t равны сумме ресурсов, необходимых для выполнения работ в этот момент времени. Здесь $r=r(t)$ – общая интенсивность потребления ресурса.

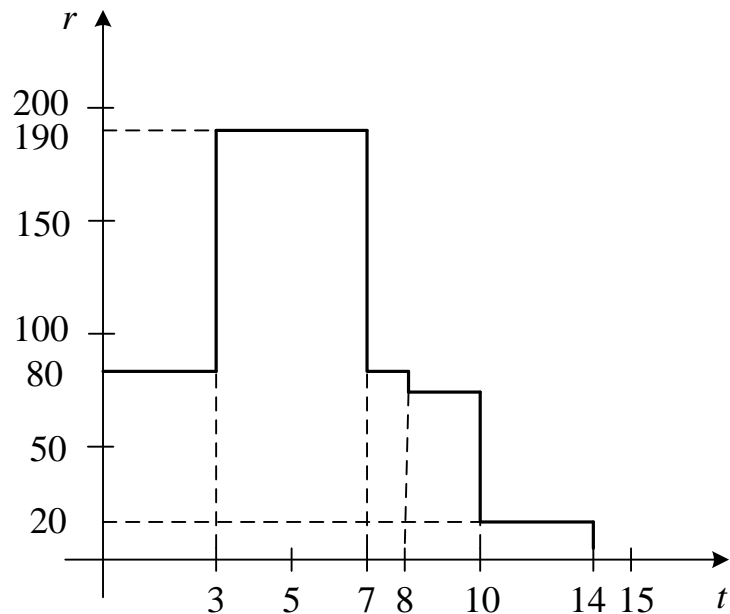


Рис. 16. График потребляемых суммарных ресурсов

Сетевые модели используются для планирования и оптимизации регламента выполнения работ по критериям потребляемых ресурсов и необходимого времени. Здесь необходимо учитывать имеющиеся в распоряжении ресурсы, так как одновременное выполнение нескольких работ из-за ограничений в рабочей силе, оборудовании, материалах и т.д. может оказаться не реализуемым. В этой ситуации возникает необходимость оценки возможности изменения срока выполнения отдельных работ при условии, что эти изменения будут выполняться в пределах полных ресурсов времени не критических работ без увеличения сроков выполнения всего комплекса работ.

Сдвигая не критическую работу в пределах ее полного резерва в том или ином направлении, можно добиться уменьшения максимального потребления ресурсов по всему фронту работ. Даже при отсутствии ограничений на ресурсы, полные резервы времени обычно используются для выравнивания суммарного потребления ресурсов $r = r(t)$ на отрезке всего времени выполнения работ $[0, t_{кр}]$. Последнее позволяет выполнить всю программу работ при более или менее равномерном потреблении ресурсов в пределах критического времени, что является важной задачей планирования производства.

Лекция 8. Основные принципы проектирования

Под проектированием обычно понимают практическую деятельность, ориентированную на создание того или иного объекта, обеспечение его последующей эксплуатации, ремонта и возможно ликвидации, а также обоснование решений, на основе которых был разработан объект. Объектом проектирования могут выступать материальный предмет, различные работы,

технологии, оказываемые услуги. Проектирование необязательно связано с техническими объектами. Возможно выполнение социального и экономического проектирования, проектирования программного обеспечения и т.д. Особенностью проектирования во всех случаях является его практическая направленность, обязательное получение практических результатов.

При проектировании сложных объектов их предпочтительней рассматривать в виде систем, т.е. комплекса взаимосвязанных элементов с определенной структурой, свойствами, внутренними и внешними связями. Часто проекты бывают комплексными. В этом случае их высокая эффективность достигается при совместном использовании различных сведений и информации из фундаментальных, технических и социально-экономических наук, а также при ориентации на потребителя (покупателя, производителя, разработчика). Такой подход реализуется в сложившейся к настоящему времени методологии проектирования, которая называется системным проектированием. Системное проектирование решает поставленные задачи комплексно, с учетом взаимодействия и взаимосвязи отдельных подсистем и элементов как между собой, так и с внешней средой, учитывает социально-экономические и экологические последствия их функционирования.

Результатом процесса проектирования является проект, представляющий собой комплект проектной документации, описывающей создаваемый материальный объект, выполнение работ, оказание услуг. Участников этого процесса можно разделить на потребителей (заказчиков проектных работ) и поставщиков (исполнителей этих работ). При создании проекта для собственного потребления возможно представление в одном лице заказчика исполнителя.

Проектирование является сложной многоплановой деятельностью, в которой может участвовать большое количество людей. При этом достижение эффективных результатов невозможно без учета особенностей разработчиков, умения сформировать работоспособный коллектив исполнителей и управлять его деятельностью. Поэтому проектирование предполагает не только творческий поиск новых решений, но и организацию проектных работ, управление проектом.

В настоящее время сложились общие процедура и алгоритмы проектирования. В каждом конкретном случае они отличаются только содержанием или названием отдельных этапов. Составляющие процесса проектирования иллюстрирует **рис. 1**.

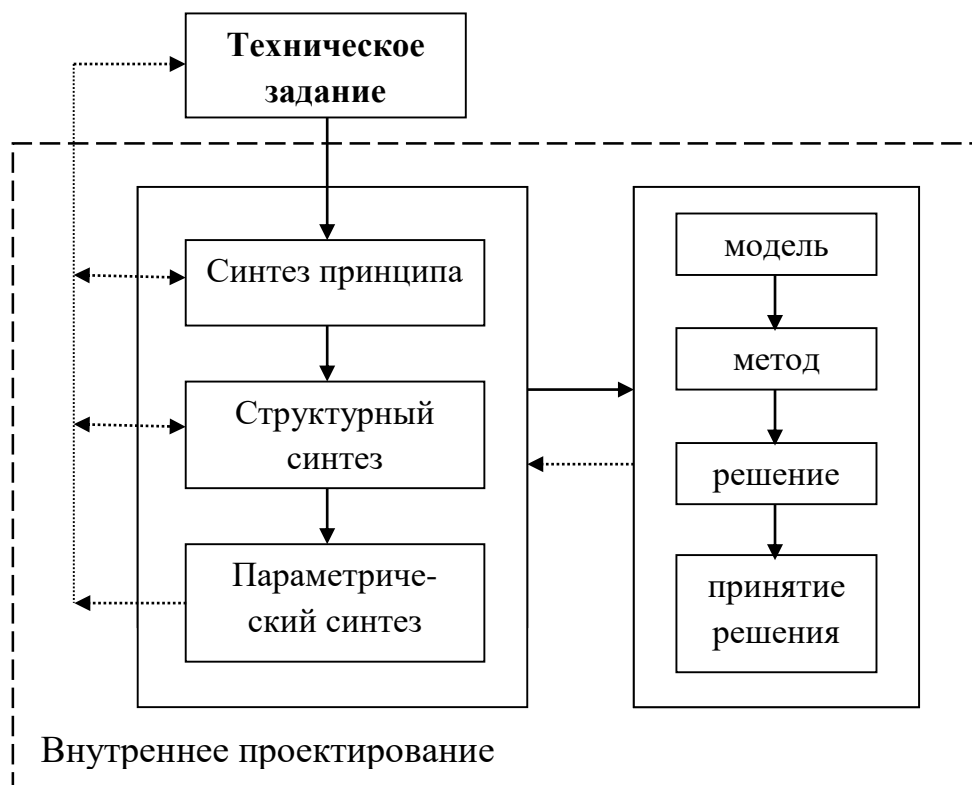


Рис. 1. Процесс решения задачи проектирования

Решение любой задачи начинается с ее общей формулировки, описания ТЗ и уточнения исходных данных, которые делаются в тесном контакте с заказчиком. В машиностроении этот этап часто называют внешним проектированием, подчеркивая, что разработку объекта, начиная с постановки задачи и формирования ТЗ нужно выполнять совместно с заказчиком. Важным результатом этого этапа является согласование целей разработки и назначения проектируемого объекта (его функций).

Следующим этапом является внутреннее проектирование, которое выполняется разработчиком и предполагает определение (синтез) принципов действия, структуры и параметров проектируемого объекта. На этом этапе определяются принципиальные положения, физические, социальные и другие эффекты, характерные для функционирования создаваемого объекта. Это могут быть установленные нормы, фундаментальные законы и правила, упрощенные варианты их формулировок. Работа на этом этапе может выполняться с использованием концептуальных моделей и их графических представлений в виде блок-схем. Этому этапу соответствует стадия технического предложения процедуры проектирования.

На этапе структурного синтеза с учетом выбранного принципа действия создаются варианты графического представления объекта в виде структуры, схем, алгоритмов, упрощенных эскизов. На этапе параметрического синтеза определяются значения параметров объекта, находится численное решение проектной задачи, создается подробная

документация или описание объекта, чертежи изделия и его частей. Этот этап соответствует стадиям технического и рабочего проектирования.

На этапе внутреннего проектирования выполняются действия:

- выбор используемой для проектирования модели (основополагающих принципов, допущений математической модели);
- выбор метода решения задачи;
- решение задачи;
- анализ полученных результатов и принятие решений.

Отметим, что эффективность проектных работ при создании объекта во многом определяется выбранными способами его описания, используемой структурой, параметрами, методами решения задачи.

Функциональное и параметрическое описание проектируемого объекта

Создаваемые в результате проектирования системы и объекты предназначены для удовлетворения различных потребностей людей. Эти потребности реализуются за счет выполнения разрабатываемой системы определенных действий или функций, причем как всей в целом, так и отдельными элементами. Одновременно с понятием функция часто используется понятие значение, особенно при рассмотрении объектов, не являющихся техническими.

Обеспечение выполнения требуемой функции является главной целью проектирования технической системы. При этом сама система выступает в качестве материального носителя, реализующего требуемую функцию. В этом смысле эта функция является первичной, а система – вторичной и создается в связи с отсутствием возможности иными, нематериальными средствами удовлетворить потребности людей. Так, автомобиль нужен для перевозки грузов и людей (функция – выполнение перемещений в пространстве) и был создан в связи с отсутствием возможности перемещения предметов усилием мысли. Назначение ручки – писать, книги – хранить информацию и т.д.

Функция, которая отражает основное назначение системы и то, ради чего эта система создается, называется **главной**. Функции, без которых невозможно выполнение главной функции, называются **основными**.

Характеристикой технической системы, ее представления служит ее структура, т.е. форма, количество и взаимное положение элементов, частей и тел, составляющих и образующих рассматриваемую систему-объект. Понятие структуры объекта отличается от понятия структуры процесса, характеризующейся последовательностью и составом стадий и этапов работы, совокупностью процедур и привлекаемых технических средств, взаимодействием участников. Основной характеристикой отдельного элемента любой системы является параметр, величина которого соответствует определенному физическому, геометрическому или иному свойству объекта и имеет количественную оценку. В зависимости от

назначения параметры можно подразделить на функциональные, объектные и вспомогательные.

Функциональные параметры описывают или задают выполняемые функции проектируемого объекта. Обычно эти параметры в процессе проектирования известны, и создание технической системы заключается в разработке объекта, имеющего требуемые значения функциональных параметров.

Объектные параметры характеризуют объект, устройство, изделие. К ним могут относиться геометрические характеристики (размер, форма, взаимное положение, количество), требования к использованным материалам. При этом марка (название) используемого материала рассматривается как обобщенный параметр, объединяющий в себе сведения о составе, условиях изготовления и иных свойствах материала. Объектные параметры используются в тех случаях, когда излишняя конкретизация при решении задачи проектирования не требуется, или предполагает использование дополнительных специальных знаний. Нахождение значений объектных параметров является одной из задач проектирования. Все остальные параметры относятся к группе вспомогательных параметров. Они используются для обоснования принимаемых решений, характеристики системы, ее отдельных частей и т.п.

Состав параметров, и особенно – вспомогательных, для каждой конкретной системы отличается. Это объясняется не только различием самих систем, но и предъявляемыми к ним требованиями, условиями применения.

Например, в качестве функциональных параметров проектируемого лифта (функция – поднимать груз) будут выступать высота подъема и масса груза, объектных – размеры и форма лифта и марки материалов, из которых он изготовлен. В качестве вспомогательных параметров могут быть использованы скорость подъема, срок службы, запас прочности, а также все то, что необходимо для обоснования принимаемых проектных решений и дополнительно характеризует технические, экономические, социальные и иные свойства проектируемого изделия. Технические системы различаются по назначению и устройству. Поэтому при рассмотрении их как объектов исследований и разработки они могут описываться различными имитационными моделями.

Цели и задачи оптимального проектирования с использованием имитационных моделей

Инженерное проектирование ориентировано на решение задач по созданию новых или модернизации существующих техники и технологий и должно быть научно-обоснованным, технически осуществимым, экономически целесообразным, экологически безопасным. В настоящее время инженерное проектирование все в значительной степени становится сферой научно-исследовательской деятельности, предполагающей

использование методов и приемов целенаправленного и эффективного использования инженером имитационных моделей и прикладного программного обеспечения.

Целью инженерного проектирования является разработка при некоторых ограничениях, связанных с используемыми инструментальными методами и условиями нахождения решения, модели технического объекта (изделия, системы или процесса), обеспечивающая оптимальное выполнение требуемых функций при некоторых дополнительных условиях, накладываемых на характеристики объекта.

Задачи проектирования предполагают решение задач синтеза и анализа. Под синтезом понимают построение описания объекта по заданным условиям (построение информационной модели объекта проектирования). Анализ предполагает исследование функционирования объекта по его описанию.

В настоящее время синтез часто осуществляют с использованием методологии обратных задач, которая является одним из новых направлений в изучении физических процессов, применяется при оптимальном проектировании технических объектов и технологических процессов. Анализ выполняется с использованием математических моделей и пакетов прикладных программ. Различают синтез структурный и параметрический. Целью структурного синтеза является получение структурных схем объекта, содержащих сведения о составе элементов и способах соединения их между собой. Цель параметрического синтеза – определение числовых значений параметров элементов при известной структуре. Синтез называют оптимизацией, если в результате решения определяются наилучшие в определенном смысле структуры и значения параметров. При расчетах оптимальных значений параметров при заданной структуре говорят о параметрической оптимизации.

В последние годы созданы и находят широкое применение системы автоматизированного проектирования (САПР). Заметим, что создание САПР экономически оправдано, если при этом обеспечивается возможность выбора оптимального варианта решения задачи, необходимая точность, сокращение сроков проектирования, максимальная эффективность использования компьютера. При проектировании сложных объектов часто используют принцип декомпозиции.

Отметим основные подходы к структурной и параметрической оптимизации, которые используются в системах автоматизированного проектирования (САПР). Для решения задачи структурного синтеза необходимо задать правила оценки различных структур, которые могут быть получены только в результате решения задачи параметрического синтеза. С другой стороны задача параметрического синтеза может быть решена только при заданной структуре. В связи с этим структурный и параметрический синтез должны рассматриваться в рамках единого процесса, который реализуется в виде диалоговой процедуры оптимального проектирования.

Отметим основные задачи структурной оптимизации и подходы к их решению. Объект проектирования обычно задается множеством элементов и некоторым множеством операций над ними. Различают следующие задачи оптимального проектирования:

1. Выбор множества элементов, удовлетворяющих требованиям технического задания.
2. Выбор типа элементов, исходя из их наилучшего сочетания.
3. Выбор формы взаимодействия элементов в процессе оптимального проектирования с учетом связей и различной физической природы элементов.

Возможны следующие подходы к решению данных задач:

- полный перебор, который обычно, бывает, затруднен высокой трудоемкостью процесса оценки эффективности при просмотре всех возможных комбинаций сочетаний элементов;
- сокращенный перебор, в том числе с использованием методов случайного поиска, который требует задания условий останова;
- экспертные оценки.

К параметрической оптимизации относятся следующие основные задачи:

- определение оптимальных значений параметров;
- нахождения оптимальных допусков на параметры, удовлетворяющих заданным ограничениям на показатели качества;
- параметрическая идентификация (уточнение параметров в модели объекта проектирования с использованием экспериментальных данных).

Рассмотрим следующий пример задачи параметрического синтеза. Пусть требуется спроектировать контейнер в форме прямоугольного параллелепипеда объемом $V = 1 \text{ м}^3$, израсходовав при этом минимум материалов. Тогда при постоянной толщине стенок площадь S параллелепипеда должна быть минимальной. Имеем следующую задачу:

$$S = 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) \rightarrow \min ,$$

где x_1, x_2, x_3 – длины ребер.

Учитывая ограничение на объем V параллелепипеда, исключим одну переменную:

$$V = x_1x_2x_3 = 1; \quad x_3 = \frac{1}{x_1x_2} .$$

Получаем следующую задачу на минимум

$$S = 2 \left(x_1x_2 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right) \rightarrow \min . \quad (1)$$

Пусть дополнительно требуется, чтобы ребро x_2 было в три раза больше ребра x_1 , то есть $x_2 = 3x_1$. Подставляя это выражение в условие (1) получим

$$S = 2 \left(3x_1^2 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{3x_1} \right) \rightarrow \min.$$

Из необходимого условия минимума, получаем

$$\frac{dS}{dx_1} = 2 \left(6x_1 - \frac{4}{3x_1^2} \right) = 0; \quad x_1^* = \sqrt[3]{\frac{2}{9}}; \quad x_2^* = 3\sqrt[3]{\frac{2}{9}}; \quad x_3^* = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}.$$

Если исключить условие $x_2 = 3x_1$, то можно показать, что решением задачи (1) является:

$$x_1^* = 1 \text{ м}, \quad x_2^* = 1 \text{ м}, \quad x_3^* = 1 \text{ м},$$

то есть оптимальной формой будет куб.

Этапы проектирования и информационная база

Как отмечалось выше, процесс инженерного проектирования разделяется на несколько стадий и этапов, которые часто укрупняют, рассматривая следующие этапы:

Этап научно-исследовательских работ (НИР). Объединяет предпроектные исследования, техническое задание и часть технического предложения. Здесь проводятся исследование по поиску новых принципов функционирования, новых структур, нового использования физических процессов, новой элементной базы и т.п. Здесь же выполняется структурная и параметрическая оптимизация, и обосновываются исходные данные для технических заданий. Этап завершается составлением научного отчета.

Таким образом, на стадии НИР формируется научное обеспечение всех работ по созданию нового объекта.

Этап опытно-конструкторских работ (ОКР). Объединяет стадии создания технического предложения, эскизный проект, технический проект. Здесь выполняется детальная конструкторская проработка проекта, проводятся испытания опытного образца изделия.

Этап рабочего проектирования. Объединяет следующие стадии: рабочий проект, изготовление, отладка и испытания опытных партий; ввод объекта в эксплуатацию.

При создании новых веществ и материалов вместо ОКР проводятся опытно-технологические работы (ОТР), которые предусматривают разработку технологических процессов получения веществ и материалов, испытания опытных партий, подготовку технической документации и т.п.

При проектировании любого объекта формируются следующие группы сведений об объекте проектирования:

- а) информация о структуре объекта;
- б) постоянные характеристики объекта (константы физических законов, характеристики материалов, например, удельная электропроводность, коэффициенты теплопроводности и т.п.);

в) входные данные, внешние параметры объекта, задаваемые при проектировании, например, мощность электродвигателя, напряжение питающей сети, скорость и т.п.;

г) варьируемые конструктивные параметры, выбираемые при проектировании (диаметры, длины, площади сечений и т.п.);

д) переменные, зависящие от групп а) – г) (напряжения, деформации, магнитная индукция и т.п.);

е) выходные характеристики (техничко-экономические показатели, характеризующие работу объекта в целом).

Часть данных группы г) может принимать лишь дискретные значения (например, диаметры провода и т.п.). В большинстве случаев выбору подлежат не все параметры этой группы. Часть из них может быть фиксирована.

Весьма важно удачно задать начальные значения варьируемых параметров. Например, при проектировании электротехнических объектов здесь могут быть использованы приближенные формулы из теории электрических аппаратов, теории электрических и магнитных цепей.

В большинстве случаев на искомые параметры накладываются ограничения типа неравенств или равенств. Эти ограничения могут быть связаны с перегревом, габаритами, весом, магнитной индукцией и т.п.

Например, ограничения на геометрические размеры могут иметь следующий вид:

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \underline{x}_3 \leq x_3 \leq \overline{x}_3.$$

Ограничения на переменные группы д) например, могут иметь следующий вид:

- по силовой нагрузке $F \leq F_{\text{доп}}$;
- по температуре обмоток $T \leq T_{\text{доп}}$;
- по плотности тока в проводах $j \leq j_{\text{доп}}$;
- по количеству элементов $n \leq n_{\text{доп}}$.

Ограничения в общем случае имеют следующий вид:

- типа равенств: $g_i(x_1, x_2, \dots) = 0$;
- типа неравенств: $g_i(x_1, x_2, \dots) \leq 0$ или $g_i(x_1, x_2, \dots) < 0$,

где $i = 1, 2, \dots, m$; x_1, x_2, \dots – варьируемые конструктивные или технологические параметры.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Моделирование систем и процессов: учебник для академического бакалавриата / под ред. В.Н. Волковой, В.Н. Козлова. – М.: Изд-во Юрайт, 2019. – 450 с.
2. Макарова И.В., Маврин В.Г., Маврин Г.В. Моделирование процессов и систем: уч. пособие / Набережные Челны: изд-во НЧИ КФУ, 2018.- 130 с.
3. Карпушкин С.В. Основы моделирования процессов и систем: уч. пособие / Тамбов. - 2015. – 80 с.
4. Кельтон В., Лоу А. Имитационное моделирование. Классика CS. – СПб.; Киев: Издательская группа BHV, 2004. – 847 с.
5. Имитационное моделирование производственных систем / А.А. Вавилов, Д.Х. Имаев, В.И. Плескунин и др. – М.: Машиностроение; Берлин: Ферлог Техник, 1983. – 416 с.
6. Форрестер Дж. Основы кибернетики предприятия (индустриальная динамика). – М.: Прогресс, 1971. – 340 с.
7. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
8. Аюнов В.В. Имитационное моделирование технических систем. – Пермь: ИПЦ «Прокрость», 2017. – 242 с.
9. Петухов О.А. Моделирование: системное, имитационное, аналитическое / О.А. Петухов, А.В. Морозов, Е.О. Петухов. – СПб.: Изд-во СЗТУ, 2008. – 288 с.
10. Демидович Б.П. Численные методы анализа : приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения, учеб. пособие / Марон И.А., Шувалова Э.З.; под ред. Б.П. Демидовича; 4-е изд., стер. – СПб., М., Краснодар: Лань, 2008. - 400 с.