



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ДГТУ)

Кафедра «Автоматизация и математическое моделирование
в нефтегазовом комплексе»

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

Ростов-на-Дону

2024

Составители: доц. каф. АиММ НГК, к.т.н. Т.Ю. Горбаенко,
ст. препод. каф. АиММ НГК Т.П. Скакунова

Задания для контрольной работы по дисциплине «Моделирование систем и процессов» ДГТУ, г. Ростов-на-Дону, 2024 г.

В методических указаниях изложены теоретические вопросы, необходимые для успешного выполнения заданий контрольной работы, приведены примеры выполнения заданий, варианты для самостоятельной работы и контрольные вопросы для самопроверки.

Предназначено для студентов заочной формы обучения по направлению 15.03.04.

Ответственный за выпуск:

Зав. кафедрой АиММ НГК Фугаров Д.Д.

Издательский центр ДГТУ, 2024 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1	Введение	4
2	Задание №1. Наилучшее приближение непрерывных функций на множестве полиномов (метод наименьших квадратов)	5
3	Задание № 2. Анализ временных рядов	16
4	Задание № 3. Задача распределения неоднородных ресурсов. Составление оптимального плана выпуска продукции	23
5	Задание № 4. Задача о смесях. Составление смеси бензина с заданными показателями качества	35
6	Задание № 5. Использование мощностей оборудования	41
7	Задание № 6. Экономико-математическая модель межотраслевого баланса (модель Леонтьева)	51
8	Контрольные вопросы	57
9	Перечень использованных информационных ресурсов	57

ВВЕДЕНИЕ

Изучение курса «Моделирование систем и процессов» позволяет студентам получить знания и умения, необходимые для разработки моделей технических систем различного назначения для проведения компьютерного эксперимента.

Целью дисциплины является изучение особенностей и возможностей применения методов моделирования систем различных классов в реальных условиях, возникающих при проведении научных исследований.

Лабораторные работы рекомендуется оформлять на листах формата А4 с помощью текстового редактора Word. Размер шрифта Times New Roman – 14 пт, одинарный междустрочный интервал.

В начале каждого задания следует привести его полную формулировку.

Изложение материала в выполненной работе должно быть кратким, в виде конспекта, решения задач представлены скриншотами.

Вариант задания определяется по последней цифре зачетной книжки студента, где 0 – это 10 вариант.

Выполненные контрольные работы скрепляются одним титульным листом, на котором указываются фамилия, имя, отчество студента, название специальности, номер учебной группы и номер зачетной книжки.

Выполненная работа предъявляется на рецензию преподавателю. Работа, неправильно оформленная или выполненная не для своего варианта, к рецензии не принимается.

Задание № 1. Наилучшее приближение непрерывных функций на множестве полиномов (метод наименьших квадратов)

Краткая теория

Рассмотрим множество (пространство) V^3 геометрических векторов (направленных отрезков) в пространстве. Векторы \bar{a}, \bar{b}, \dots из множества V^3 можно задать их координатами в базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ (рис. 1): $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, ... так, что $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$, $\bar{b} = b_1\bar{i} + b_2\bar{j} + b_3\bar{k}$, ...

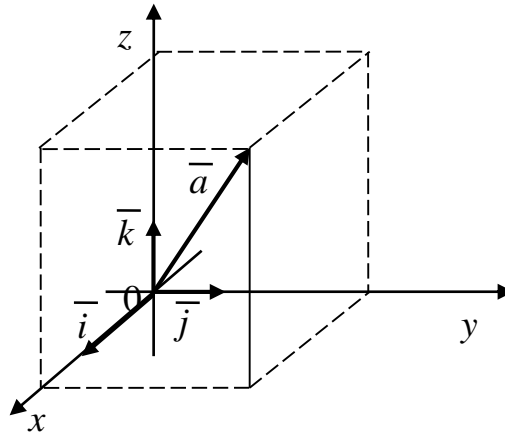


Рис. 1. Определение вектора в пространстве V^3 .

В пространстве V^3 определим скалярное произведение векторов $\bar{a}, \bar{b} \in V^3$ по правилу

$$(\bar{a}, \bar{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \quad (1)$$

Введем в рассмотрение множество (пространство) R^3 , элементами которого являются наборы из трех чисел $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, ..., а также скалярное произведение в R^3 по правилу (1).

Рассмотрим следующую задачу. Пусть $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3) \in R^3$, \bar{a} – заданный элемент, L – заданная в системе координат $xOyz$ плоскость. Требуется найти элемент $\bar{u}^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*)$ такой, что для всех элементов $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3) \in L$ выполняется

$$\rho(\bar{a}, \bar{u}^*) = \min_{\bar{u} \in L} \rho(\bar{a}, \bar{u}). \quad (2)$$

Равенство (2) задает расстояние между двумя элементами $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3) \in R^3$ и $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3) \in R^3$, которое равно

$$\rho(\bar{a}, \bar{b}) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}. \quad (3)$$

Элемент \bar{u}^* , определенный в условии (2), называется **элементом наилучшего приближения** (ЭНП) для \bar{a} . Согласно условию (2), он является наиболее близким к элементу \bar{a} в L .

Решение задачи может быть найдено геометрически (рис. 2.).

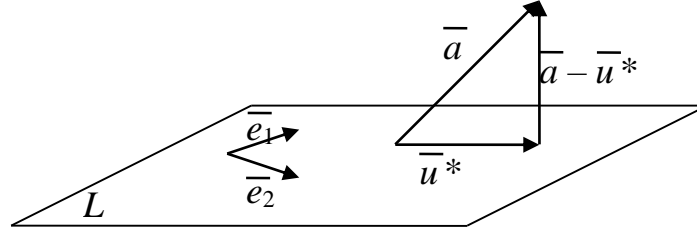


Рис. 2. Определение элемента наилучшего приближения

Действительно, если \bar{u}^* – ЭНП для \bar{a} , то \bar{u}^* является проекцией вектора \bar{a} на плоскость L . Это означает, что вектор $\bar{a} - \bar{u}^*$ перпендикулярен любому вектору, лежащему в L . Пусть \bar{e}_1 и \bar{e}_2 – два неколлинеарных вектора, лежащих в плоскости L . Тогда любой вектор $\bar{u} \in L$ представим в виде

$$\bar{u} = u_1 \bar{e}_1 + u_2 \bar{e}_2. \quad (4)$$

При этом, если $\bar{u} = \bar{u}^*$, то должно выполняться $(\bar{a} - \bar{u}, \bar{e}_1) = 0$; $(\bar{a} - \bar{u}, \bar{e}_2) = 0$.

Получаем СЛАУ относительно переменных u_1, u_2 в (4):

$$\begin{aligned} u_1 (\bar{e}_1, \bar{e}_1) + u_2 (\bar{e}_2, \bar{e}_1) &= (\bar{a}, \bar{e}_1); \\ u_1 (\bar{e}_1, \bar{e}_2) + u_2 (\bar{e}_2, \bar{e}_2) &= (\bar{a}, \bar{e}_2). \end{aligned} \quad (5)$$

В результате решения СЛАУ (5) находятся значения u_1, u_2 и далее ЭНП вида (4).

Обобщим полученный результат. Введем в рассмотрение множество (пространство) R^n , элементами которого служат наборы из n действительных чисел $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n), \dots$.

Введем в R^n скалярное произведение (\bar{a}, \bar{b}) и расстояние $\rho(\bar{a}, \bar{b})$ по правилам:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n; \quad (6)$$

$$\rho(\bar{a}, \bar{b}) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}. \quad (7)$$

Пусть $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m$ ($m < n$) – заданные элементы в R^n , такие, что ни один из них не может быть выражен через другие. Рассмотрим в R^n множество L , элементы которого допускают представление

$$\bar{u} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \dots + \alpha_m \bar{e}_m \in L. \quad (8)$$

Пусть \bar{a} - заданный элемент в R^n . Будем искать ЭНП $\bar{u} = \bar{u}^*$ для \bar{a} в L так, чтобы обеспечить выполнение условия (2) для расстояния (7). Также как и в случае R^3 , можно показать, что в любом пространстве R^n ($n \geq 3$) ЭНП вида (8) может быть найден в результате решения СЛАУ

$$(\bar{a} - \bar{u}, \bar{e}_k) = 0, \quad k = \overline{1, m},$$

где скалярное произведение понимается в смысле R^n (6).

В результате получаем СЛАУ

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i (\bar{e}_i, \bar{e}_k) = (\bar{a}, \bar{e}_k), \quad k = \overline{1, m}. \quad (9)$$

Находя решение СЛАУ (9) и подставляя значения $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ в равенство (8), находим ЭНП для \bar{a} .

Рассмотрим теперь следующую задачу. Пусть функция $y = f(t)$ задана своими значениями в n - узлах $t_i, i = \overline{1, n}$. Рассмотрим множество P^m - полиномов степени не выше m , каждый элемент которого $u(t) \in P^m$ представим в виде

$$u = u(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_m t^m. \quad (10)$$

Требуется найти полином $u = u^*(t)$ такой, чтобы его значения в узлах $u_i = u(t_i)$ были как можно ближе к значению функций $y = f(t)$ в этих точках $y_i = f(t_i), i = \overline{1, n}$. При этом меру близости $u(t)$ и $y = f(t)$ будем понимать (как в пространстве R^n) в следующем смысле:

$$\rho(\bar{y}, \bar{u}) = \sqrt{(y_1 - u_1)^2 + (y_2 - u_2)^2 + \dots + (y_n - u_n)^2}, \quad (11)$$

где $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ - значения функций, $y_k = f(t_k)$; $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ - значения полинома, $u_k = u(t_k)$.

Заметим, что согласно равенству (11), $\rho(\bar{y}, \bar{u}) = 0$ тогда и только тогда, когда $y_k = u_k, k = \overline{1, n}$.

Сформулированная задача имеет единственное решение, если для степени полинома выполняется условие $m + 1 \leq n$, и среди чисел t_i, t_j ($i \neq j$) нет равных.

Согласно постановке задачи, для искомого полинома $u = u^*(t)$, значения которого в точках $t_k, k = \overline{1, n}$ равны $u_k^* = u_k^*(t_k)$, должно выполняться:

$$\rho(\bar{y}, \bar{u}^*) = \min_{\bar{u} \in L} \rho(\bar{y}, \bar{u}),$$

где множество L будет определено ниже.

Удовлетворяющий этому условию полином называется **полиномом наилучшего приближения**. Перейдем к решению задачи. Замечаем, что согласно равенству (10):

$$\begin{aligned} u_1 = u(t_1) &= \alpha_0 + \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_1^2 + \dots + \alpha_m t_1^m; \\ u_2 = u(t_2) &= \alpha_0 + \alpha_1 t_2 + \alpha_2 t_2^2 + \dots + \alpha_m t_2^m; \end{aligned} \quad (12)$$

$$u_n = u(t_n) = \alpha_0 + \alpha_1 t_n + \alpha_2 t_n^2 + \dots + \alpha_m t_n^m.$$

Введем следующие обозначения. Пусть

$$\bar{e}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \dots \\ t_n \end{pmatrix}; \quad \bar{e}_m = \begin{pmatrix} t_1^m \\ t_2^m \\ \dots \\ t_n^m \end{pmatrix}; \quad \bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Тогда система (12) записывается в виде:

$$\bar{u} = \alpha_0 \bar{e}_1 + \alpha_1 \bar{e}_2 + \dots + \alpha_m \bar{e}_m. \quad (13)$$

Введем в R^n подмножество $L \subset R^n$, каждый элемент которого представим в виде (13). Будем искать ЭНП для элемента $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n$ на множестве L . Получаем, что ЭНП находится из условия:

$$\begin{aligned} (\bar{y} - \bar{u}, \bar{e}_n) &= (\bar{y}, \bar{e}_n) - \sum_{i=0}^m \alpha_i (\bar{e}_i, \bar{e}_n) = 0, \quad n = \overline{0, m}; \\ \sum_{i=0}^m \alpha_i (\bar{e}_i, \bar{e}_k) &= (\bar{y}, \bar{e}_k), \quad k = \overline{0, m}. \end{aligned} \quad (14)$$

Решая СЛАУ (14), можно найти неизвестные $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$, затем ЭНП вида (13) в $L \subset R^n$, после этого полином наилучшего приближения (ПНП) – $u(t)$ для функции $y(t)$, расстояние между которыми понимается в смысле расстояния между наборами их значений в узлах $t_j, j = \overline{1, n}$. При этом полином наилучшего приближения в указанном выше смысле задается равенством (13).

Найдем скалярные произведения в системе (14), учитывая, что

$$\begin{aligned} \bar{e}_i &= \begin{pmatrix} t_1^i \\ t_2^i \\ \dots \\ t_n^i \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_k = \begin{pmatrix} t_1^k \\ t_2^k \\ \dots \\ t_n^k \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}. \\ (\bar{e}_i, \bar{e}_k) &= t_1^i t_1^k + t_2^i t_2^k + \dots + t_n^i t_n^k = \sum_{j=1}^n t_j^{i+k}; \end{aligned}$$

$$(\bar{y}_1, \bar{e}_k) = y_1 t_1^k + y_2 t_2^k + \dots + y_n t_n^k = \sum_{j=1}^n y_j t_j^k.$$

Подстановка полученных значений в СЛАУ (14), позволяет найти ее решение $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Пример. Найти ЭНП на множестве полиномов степени не выше 2, если функция $y = y(t)$ задана своими значениями в точках $\{t_k\}_{k=1}^5 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, которые равны $\{y_k\}_{k=1}^5 = \{16, 1, 0, 1, 16\}$, где $y_k = y(t_k)$, $k = \overline{1, 5}$.

Решим рассмотренную выше общую задачу для частного случая $n=5$; $m=2$. При этом имеем

$$\bar{e}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 16 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 16 \end{pmatrix};$$

$$(\bar{e}_0, \bar{e}_0) = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 5;$$

$$(\bar{e}_0, \bar{e}_1) = -2 - 1 + 0 + 1 + 2 = 0 = (\bar{e}_1, \bar{e}_0);$$

$$(\bar{e}_0, \bar{e}_2) = 4 + 1 + 1 + 4 = 10 = (\bar{e}_2, \bar{e}_0);$$

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_1) = 4 + 1 + 1 + 4 = 10;$$

$$(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = 0 = (\bar{e}_2, \bar{e}_1);$$

$$(\bar{e}_2, \bar{e}_2) = 16 + 1 + 1 + 16 = 34;$$

$$(\bar{e}_0, \bar{y}) = 16 + 1 + 1 + 16 = 34;$$

$$(\bar{e}_1, \bar{y}) = -32 - 1 + 1 + 32 = 0;$$

$$(\bar{e}_2, \bar{y}) = 64 + 1 + 1 + 64 = 130.$$

Получаем СЛАУ вида (14):

$$\begin{cases} 5\alpha_0 + 0 \cdot \alpha_1 + 10\alpha_2 = 34; \\ 0\alpha_0 + 10\alpha_1 + 0\alpha_2 = 0; \\ 10\alpha_0 + 0\alpha_1 + 34\alpha_2 = 130; \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = 0; \\ 5\alpha_0 + 10\alpha_2 = 34; \\ 10\alpha_0 + 34\alpha_2 = 130; \end{cases}$$

$$14\alpha_2 = 62; \quad \alpha_2 = \frac{31}{7} = 4,4; \quad 5\alpha_0 = -10; \quad \alpha_0 = -2.$$

Находим элемент наилучшего приближения $u^* = -2 + 4,4t^2$. На рис. 3 представлены графики исходной функции $y(t)$ и ЭНП $u^*(t)$.

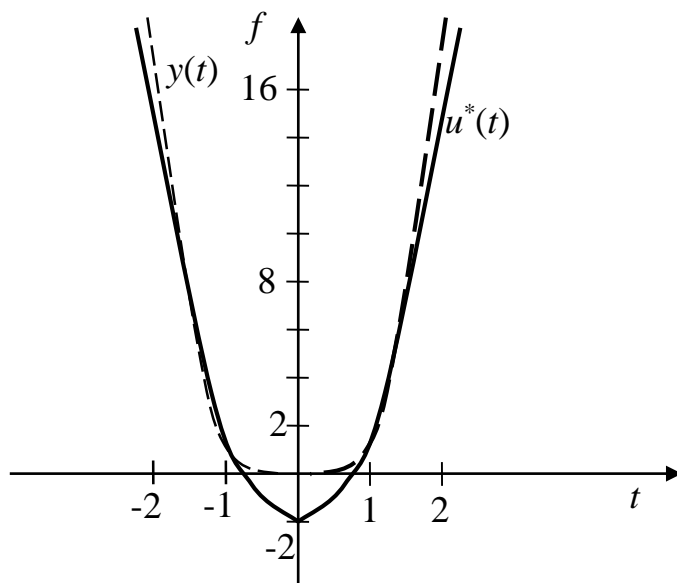


Рис. 3. Исходный многочлен $y(t)$ (- - - -) и ЭНП $u^*(t)$ (—)

Примеры применения метода наименьших квадратов для аппроксимации функции, заданной таблицей

На практике часто возникает задача, когда требуется найти функциональную зависимость $y = f(x)$ между двумя наборами данных x_1, x_2, \dots, x_n и y_1, y_2, \dots, y_n . Для решения такой задачи может использоваться метод наименьших квадратов.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть имеется набор точек (x_k, y_k) , $k = \overline{1, n}$. Требуется подобрать функцию $y = f(x)$ такую, чтобы ее значения $f(x_k)$ наилучшим образом приближали значения y_k , то есть разница между значениями $f(x_k)$ и y_k по всем $k = \overline{1, n}$ была как можно ближе к нулю.

Рассмотрим функцию:

$$F(x) = \sum_{k=1}^n (f(x) - y_k)^2,$$

и потребуем, чтобы

$$F(x_k) = \sum_{k=1}^n (f(x_k) - y_k)^2 \rightarrow \min. \quad (15)$$

Заметим, что для функции $F(x)$ в силу ее задания, значение ноль является наименьшим. Функцию $y = f(x)$ можно задавать разными способами, выбирая ее из класса линейных, квадратичных, экспоненциальных и др. функций. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Функция $y = f(x)$ выбирается из класса линейных функций, то есть $y = f(x) = c_1x + c_2$, тогда из (15) получаем

$$F(x_k) = \sum_{k=1}^n (c_1 x_k + c_2 - y_k)^2 \rightarrow \min. \quad (16)$$

Подберем параметры для определения функции $y = f(x)$, используя необходимое условие экстремума для функций многих переменных:

$$\frac{\partial F}{\partial c_1} = \sum_{k=1}^n 2(c_1 x_k + c_2 - y_k) x_k = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial c_2} = \sum_{k=1}^n 2(c_1 x_k + c_2 - y_k) = 0.$$

Преобразуя записанные уравнения, получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 = b_1; \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 = b_2, \end{cases} \quad (17)$$

где $a_{11} = \sum_{k=1}^n x_k^2$; $a_{12} = a_{21} = \sum_{k=1}^n x_k$; $a_{22} = n$; $b_1 = \sum_{k=1}^n y_k x_k$; $b_2 = \sum_{k=1}^n y_k$.

Для определения коэффициентов системы (17) воспользуемся следующими функциями Excel:

- СУММ(арг), которая суммирует значения ячеек указанных в арг;
- СУММКВ(арг), которая суммирует возведенные в квадрат значения ячеек, указанных в арг;
- СУММПРОИЗВ(арг1;арг2), которая перемножает соответствующие элементы диапазонов арг1 и арг2, а затем суммирует полученные произведения. Здесь важно, чтобы размеры диапазонов арг1 и арг2 совпадали.

Так как такая система уравнений имеет единственное решение, то решим ее, используя матричный метод и функции Excel. Суть его заключается в следующем. Любая СЛАУ может быть представлена в виде

$$Ax = B, \quad (18)$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов системы при

неизвестных; $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – столбец неизвестных; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ – столбец свободных

членов.

Решение системы (18) можно найти по формуле:

$$x = A^{-1}B, \quad (19)$$

где A^{-1} – обратная матрица для матрицы A .

В Excel для нахождения обратной матрицы имеется функция МОБР(арг), где в качестве арг указывается диапазон, в котором расположена матрица A .

Пример 1. Пусть имеется набор точек (табл. 1), для которых требуется подобрать линейную функцию $y = f(x) = c_1x + c_2$.

Таблица 1

№ точки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_k	0,2	0,3	0,5	0,7	0,85	0,92	1,1	1,2	1,35	1,45
y_k	5,9	6	6,1	6,5	6,3	6	5,8	5,4	5,2	5

Построим на листе Excel расчетную область (рис. 4). Для вычисления коэффициентов системы (17) запишем в ячейках B6:D7 соответственно формулы:

B6 → =СУММКВ(B2:K2);

C6 → =СУММ(B2:K2);

D6 → =СУММПРОИЗВ(B2:K2;B3:K3);

B7 → =СУММ(B2:K2);

C7 → 10;

D7 → =СУММ(B3:K3).

Далее в ячейках G6:H7 посчитаем обратную матрицу. Для этого выполним действия:

1) введем формулу в ячейку G6 → МОБР(B6:C7);

2) выделим диапазон для размещения обратной матрицы G6:H7;

3) установим курсор в строку формул и одновременно нажмем клавиши Ctrl, Shift, Enter.

Используя формулу (19), найдем умножая матрицы A^{-1} и B коэффициенты функции:

1) введем формулу в ячейку K6 → МУМНОЖ(G6:H7;D6:D7);

2) выделим диапазон для размещения результата K6:K7;

3) установим курсор в строку формул и одновременно нажмем клавиши Ctrl, Shift, Enter.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	№ точки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	x_k	0,2	0,3	0,5	0,7	0,85	0,92	1,1	1,2	1,35	1,45
3	y_k	5,9	6	6,1	6,5	6,3	6	5,8	5,4	5,2	5
4											
5		c1	c2								
6	1 ур-е	9,014	8,57	48,59		Аобр	0,599	-0,513		c1=	-0,774
7	2 ур-е	8,57	10	58,2			-0,513	0,54		c2=	6,483
8											
9	f(xk)	6,329	6,251	6,096	5,942	5,825	5,771	5,632	5,554	5,438	5,361
10	разность	0,429	0,251	0,004	0,558	0,475	0,229	0,168	0,154	0,238	0,361

11	delta=	0,104									
12	Применение функции ЛИНЕЙН()										
13		c1=	c2=								
14		-0,774	6,483								

Рис. 4. Расчетная область для вычисления коэффициентов функции $y = f(x) = c_1x + c_2$

Теперь рассчитаем значения функции $y = f(x) = c_1x + c_2$ в точках x_k , $k = \overline{1, n}$ и сравним их со значениями y_k , $k = \overline{1, n}$:

1) вводим формулу в ячейку B9 $\rightarrow = \$K\$6*B2+\$K\7 и распространяем ее на диапазон B9:K9;

2) находим модуль разности значений $|f(x_k) - y_k|$, вводим формулу B10 $\rightarrow =ABS(B9-B3)$;

3) для вычисления погрешности воспользуемся формулой

$$\delta = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{k=1}^n (f(x_k) - y_k)^2}, \quad (20)$$

которую запишем в ячейку B11 $\rightarrow =КОРЕНЬ(СУММКВ(B10:K10))/10$.

Эту же задачу в Excel можно решить, используя функцию ЛИНЕЙН(значения y_k ; значения x_k ; конст; статистика), где аргументы «конст» и «статистика» являются логическими. Если «конст» равен ИСТИНА, то значение c_2 может выбираться любым. Если же «конст» – ЛОЖЬ, то $c_2 = 0$. Если «статистика» равен ЛОЖЬ или опущен, то вычисляются только параметры c_1 и c_2 . В противном случае производится подсчет дополнительных статистических параметров, характеризующих линейный тренд, коэффициенты которого и являются результатом применения описываемой функции.

Проверим полученные расчеты:

1) введем B14 $\rightarrow =ЛИНЕЙН(B3:K3;B2:K2;ИСТИНА)$;

2) выделим диапазон для размещения коэффициентов B14:C14;

3) установим курсор в строку формул и одновременно нажмем клавиши Ctrl, Shift, Enter.

Сравним результаты в ячейках B14:C14 и K6:K7. Они совпадают.

Пример 2. Выберем теперь функцию $y = f(x)$ из класса квадратичных функций, то есть $y = f(x) = c_1x^2 + c_2x + c_3$. Используя формулу (15) получаем

$$F(x_k) = \sum_{k=1}^n (c_1x_k^2 + c_2x_k + c_3 - y_k)^2 \rightarrow \min. \quad (21)$$

Как и ранее воспользуемся условием экстремума для определения коэффициентов. В результате получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13}c_3 = b_1; \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + a_{23}c_3 = b_2; \\ a_{31}c_1 + a_{32}c_2 + a_{33}c_3 = b_3, \end{cases} \quad (22)$$

где $a_{11} = \sum_{k=1}^n x_k^4$; $a_{12} = a_{21} = \sum_{k=1}^n x_k^3$; $a_{13} = a_{22} = a_{31} = \sum_{k=1}^n x_k^2$; $a_{23} = a_{32} = \sum_{k=1}^n x_k$;
 $b_1 = \sum_{k=1}^n y_k x_k^2$; $b_2 = \sum_{k=1}^n y_k x_k$; $b_3 = \sum_{k=1}^n y_k$.

Воспользуемся в качестве исходных данных табл. 1.

Построим в Excel расчетную область (рис. 5), где при перенесении табл. 1 учтем, что для расчета коэффициентов понадобится находить степени значений x_k . Поэтому добавим дополнительную строку « x_k^2 ».

Как и ранее, используя функции суммирования, найдем коэффициенты системы (22):

B7→=СУММПРОИЗВ(B3:K3;B3:K3)

C7→=СУММПРОИЗВ(B3:K3;B2:K2)

D7→=СУММКВ(B2:K2)

E7→=СУММПРОИЗВ(B3:K3;B4:K4)

B8→=СУММПРОИЗВ(B3:K3;B2:K2)

C8→=СУММКВ(B2:K2)

D8→=СУММ(B2:K2)

E8→=СУММПРОИЗВ(B4:K4;B2:K2)

B9→=СУММКВ(B2:K2)

C9→=СУММ(B2:K2)

D9→=10

E9→=СУММ(B4:K4)

В ячейках F7:H9 вычислим обратную матрицу МОБР(B7:C9), а затем, используя МУМНОЖ(F7:H9;D7:D9), коэффициенты функции $y = f(x)$.

Подсчитаем значения функции $y = f(x)$ в точках x_k , $k = \overline{1, n}$. Для этого введем формулу

B11→= \$K\$7*B2^2+\$K\$8*B2+\$K\$9

и распространим ее на диапазон B11:K11.

Для вычисления погрешности воспользуемся формулой (20). Отметим, что квадратичная функция $y = f(x) = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$ лучше приближает значения y_k , $k = \overline{1, n}$, чем линейная. Это следует из сравнения значений погрешности в ячейках B11 (рис. 4) и B13 (рис. 5).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	№ точки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	xk	0,2	0,3	0,5	0,7	0,85	0,92	1,1	1,2	1,35	1,45
3	xk^2	0,04	0,09	0,25	0,49	0,723	0,846	1,21	1,44	1,823	2,103
4	yk	5,9	6	6,1	6,5	6,3	6	5,8	5,4	5,2	5
5											

6		c1	c2	c3							
7	1 ур-е	12,830	10,464	9,014	49,900	Аобр=	4,721	-7,745	2,382	c1=	-2,081
8	2 ур-е	10,464	9,014	8,570	48,585		-7,745	13,306	-4,422	c2=	2,641
9	3 ур-е	9,014	8,570	10,000	58,200		2,382	-4,422	1,742	c3=	5,433
10											
11	f(xk)	5,878	6,038	6,233	6,262	6,174	6,101	5,819	5,605	5,205	4,886
12	разность	0,022	0,038	0,133	0,238	0,126	0,101	0,019	0,205	0,005	0,114
13	delta	0,03973									
14											
15		c1=	c2=	c3=							
16		-2,081	2,641	5,433							

Рис. 5. Расчетная область для вычисления
коэффициентов функции $y = f(x) = c_1x^2 + c_2x + c_3$

Замечание. Для нахождения коэффициентов квадратичной функции $y = f(x) = c_1x^2 + c_2x + c_3$ также можно воспользоваться функцией ЛИНЕЙН. При этом ее параметры задаются следующим образом:

B16→=ЛИНЕЙН(B4:K4;B2:K3;ИСТИНА).

Параметры c_1 , c_2 и c_3 , полученные с ее помощью, не отличаются от параметров, полученных при решении системы (22).

Задание

Для набора точек (табл. 2) требуется подобрать линейную функцию $y = f(x) = c_1x + c_2$ и квадратичную функцию вида $y = f(x) = c_1x^2 + c_2x + c_3$. Сделать вывод о лучшем приближении значений y_k .

Таблица 2

№ вар	№ точки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	x_k	0,2	0,3	0,5	0,7	0,8	0,9	1,1	1,2	1,3	1,4
	y_k	3,9	5	6,1	6,5	6,3	6	4,8	5,4	5,2	6
2	x_k	2,5	2,7	2,9	3,0	3,3	3,5	3,8	4,1	4,4	5,2
	y_k	7,8	8	8,4	8,9	9,2	10	8,1	8,9	12,0	11,4
3	x_k	5,2	5,5	6	7	7,5	7,8	8,1	8,9	9	9,5
	y_k	20	19,5	19,1	19	18,2	18,9	18,1	17,8	17,7	18
4	x_k	1,1	1,9	2,2	2,4	2,6	2,8	3	3,3	3,5	3,8
	y_k	4,4	4,6	5,2	4,8	5,6	5,9	6	6,2	6,1	8
5	x_k	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7	3	3,3	3,7
	y_k	6,1	6,7	6,5	7	7,3	7,2	7,7	7,4	7,1	7,7
6	x_k	0,3	0,6	0,8	1	1,3	1,6	1,8	1,9	2,2	2,4
	y_k	3,5	3,8	4,5	5,2	5,9	6,5	7,1	7,3	8	9
7	x_k	1,5	1,8	2	2,2	2,5	3	3,3	3,7	4	4,5
	y_k	7	7,5	8	8,5	9	9,5	9	9,1	8,2	8,4
8	x_k	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7
	y_k	12,2	13,5	14,8	15,6	16	16,9	17,7	18,6	19,8	22

9	x_k	3,2	3,4	3,6	3,8	4	4,2	4,4	4,6	4,8	5
	y_k	5,1	5,8	6,5	7,1	8	8,3	8,4	7	7,3	7,5
10	x_k	4,5	4,7	5	5,5	5,8	6,2	6,6	6,9	7,3	7,5
	y_k	10	10,9	12	13,4	14,7	14,8	14	13,9	13,5	13
11	x_k	2,5	2,7	2,9	3,0	3,3	3,5	3,8	4,1	4,4	5,2
	y_k	7	7,2	8	8,3	9	8,5	8,1	8,1	9,2	10
12	x_k	1,1	1,9	2,2	2,4	2,6	2,8	3	3,3	3,5	3,8
	y_k	6,1	6,7	6,5	7	7,3	7,2	7,7	7,9	8,1	7,7
13	x_k	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7	3	3,3	3,7
	y_k	10	10,9	12	13,4	14,7	13,8	14	13,9	13,5	12
14	x_k	1,5	1,8	2	2,2	2,5	3	3,3	3,7	4	4,5
	y_k	12,2	13,5	14,8	15,6	16	16,9	17,7	18,6	19,8	22
15	x_k	0,3	0,6	0,8	1	1,3	1,6	1,8	1,9	2,2	2,4
	y_k	4,4	4,6	5,2	4,8	5,6	5,9	6	6,7	6,5	8

Задание № 2. Анализ временных рядов

Краткая теория

Временным рядом называется набор наблюдаемых значений какого-либо показателя y , которые фиксируются с некоторым постоянным шагом (через день, неделю, месяц, квартал, год). Такой набор полностью определен значениями показателя y_k и номером k , соответствующим моменту времени t_k его фиксации. Поэтому под временным рядом показателя будем понимать набор его значений $y_1, y_2, \dots, y_k, \dots, y_n$ в моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots, t_n$.

Анализ временных рядов обычно предполагает решение двух задач.

1. Выявление тенденции изменения показателя во времени или, как говорят иначе, тренда. Эта задача сводится к нахождению относительно простой функции $y = f(t)$, описывающей изменение показателя. В качестве такой функции обычно используются линейная, квадратичная или тригонометрическая функции.

2. Выполнение прогноза изменения анализируемого показателя во времени на период τ ($\tau = 1, 2, 3, \dots$).

Проиллюстрируем решение перечисленных задач на следующем примере. Пусть известен объем выпуска продукции по месяцам с января по май (с 1-го по 5-й месяцы), который задается **табл. 1**.

Таблица 1. Объем выпуска продукции

Месяц (t_k)	1	2	3	4	5
-----------------	---	---	---	---	---

Объем выпуска (y_k) тыс. шт.	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
----------------------------------	-------	-------	-------	-------	-------

В табл. 1 объем выпуска y_k (тыс. шт.) в k -й месяц ($k = \overline{1,5}$) задается равенством:

$$y_k = 10 + 0,05(p + 2q + 1)k + 0,01(p + q + 1)k^2 + 0,02(2p + q + 1)(-1)^k, \quad (1)$$

Используя данные (1) в табл. 1, определить:

1. Линейный тренд, описывающий изменение объема выпуска по месяцам в виде:

$$y(t) = f_1(t) = c_1 + c_2 t, \quad t = t_k = k, \quad k = \overline{1,5}. \quad (2)$$

2. Квадратичный тренд, задаваемый равенством:

$$y = f_2(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2, \quad t = t_k = k, \quad k = \overline{1,5}. \quad (3)$$

3. Погрешность приближения данных временным рядом при использовании трендов (2), (3).

4. Прогнозируемое значение объема выпуска в июне (6 месяц года).

Цифровая модель, используемая при решении задачи

1. Найдем коэффициенты c_1, c_2 , задающие линейный тренд (2) методом наименьших квадратов (МНК), минимизируя отклонения между заданными значениями y_k и значениями, полученными по формуле (2), то есть из условия:

$$\rho = \sum_{k=1}^n (c_1 + c_2 t_k - y_k)^2 \rightarrow \min.$$

Согласно МНК получаем следующую СЛАУ относительно неизвестных c_1, c_2 :

$$\begin{aligned} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 &= b_1; \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 &= b_2, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{где } a_{11} = \sum_{k=1}^5 1 = n; \quad a_{12} = a_{21} = \sum_{k=1}^5 t_k = 15; \quad a_{22} = \sum_{k=1}^5 t_k^2 = 55; \quad b_1 = \sum_{k=1}^5 y_k; \\ b_2 = \sum_{k=1}^5 t_k y_k.$$

В результате решения СЛАУ (4) находятся значения c_1, c_2 и линейный тренд (4).

2. Для нахождения коэффициентов c_1, c_2, c_3 квадратичного тренда (3) МНК формируется СЛАУ вида:

$$\begin{aligned} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13}c_3 &= b_1; \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + a_{23}c_3 &= b_2; \\ a_{31}c_1 + a_{32}c_2 + a_{33}c_3 &= b_3, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{где } a_{11} = n; \quad a_{12} = a_{21} = \sum_{k=1}^5 t_k; \quad a_{13} = a_{31} = \sum_{k=1}^5 t_k^2; \quad a_{22} = \sum_{k=1}^5 t_k^2; \quad a_{23} = a_{32} = \sum_{k=1}^5 t_k^3; \\ a_{33} = \sum_{k=1}^5 t_k^4; \quad b_1 = \sum_{k=1}^5 y_k; \quad b_2 = \sum_{k=1}^5 t_k y_k; \quad b_3 = \sum_{k=1}^5 t_k^2 y_k.$$

В результате решения СЛАУ (5) находятся неизвестные c_1, c_2, c_3 , затем с учетом равенства (3) квадратичный тренд.

3. Для нахождения погрешности приближения временного ряда линейным трендом (2) сначала находится относительная погрешность в узлах

$$\delta_k^{(1)} = \frac{|f_1(t_k) - y_k|}{y_k} \cdot 100\%, \quad k = \overline{1, 5}, \quad (6)$$

В качестве погрешности квадратичного приближения принимается наибольшее из значений (6).

При квадратичном приближении (6) находится значение:

$$\delta_k^{(2)} = \frac{|f_2(t_k) - y_k|}{y_k} \cdot 100\%, \quad k = \overline{1, 5}, \quad (7)$$

а затем среди полученных значений выбирается наибольшее, которое и принимается в качестве погрешности квадратичного приближения.

4. Прогнозирование объема выпуска с использованием трендов (2), (3) в июне (шестой месяц) выполняется по формулам:

$$y_6^{(1)} = f_1(6); \quad y_6^{(2)} = f_2(6).$$

Пример выполнению задания. Рассмотрим порядок выполнения работы для случая $p=0$ и $q=0$. Объем выпуска продукции тогда вычисляется по формуле (1):

$$y_k = 10 + 0,05k + 0,01k^2 + 0,02(-1)^k, \quad k = \overline{1, 5}.$$

На листе Excel (рис. 1) сформируем расчетную область. Для построения табл. 1 с исходными данными выполняются следующие действия:

1) создаем автоматизированный список с номерами месяцев в ячейках B3:F3;

2) используя формулу (1), вычисляем объем выпуска продукции B4→

$$=10+0,05*(B1+2*D1+1)*B3+0,01*(B1+D1+1)*B3^2+0,02*(2*B1+D1+1)*(-1)^B3.$$

Формулу распространяем так, чтобы получить значение выпуска продукции для всех месяцев.

Сначала найдем коэффициенты c_1 и c_2 линейного тренда $y(t) = f_1(t) = c_1 + c_2 t$. Для их вычисления сформируем систему уравнений (4), используя формулы для расчета ее коэффициентов:

$$a_{11} = \sum_{k=1}^5 1 = n \quad B8 \rightarrow =F1;$$

$$a_{12} = a_{21} = \sum_{k=1}^5 t_k; \quad C8 \rightarrow =СУММ(B3:F3); B9 \rightarrow =C8;$$

$$a_{22} = \sum_{k=1}^5 t_k^2; \quad C9 \rightarrow =СУММКВ(B3:F3);$$

$$b_1 = \sum_{k=1}^5 y_k; \quad D8 \rightarrow =СУММ(B4:F4);$$

$$b_2 = \sum_{k=1}^5 t_k y_k; \quad D9 \rightarrow =СУММПРОИЗВ(B3:F3;B4:F4),$$

где функция СУММКВ(арг) подсчитывает сумму возведенных в квадрат аргументов.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	p=	0	q=	0	n=	5			
2	Объем выпуска продукции								
3	Месяц t_k	1	2	3	4	5			
4	Объем выпуска y_k	10,04	10,16	10,22	10,38	10,48			
5	t_k^2								
6		Линейный тренд				Квадратичный тренд			
7		c1	c2			c1	c2	c3	
8		5	15	51,28		5	15	55	51,28
9		15	55	154,9		15	55	225	154,9
10		Решение:				55	225	979	570,7
11		1	3	10,26		Решение:			
12			10	1,1		4,6	-3,3	0,5	4,6

13			c1=	9,926		-3,3	2,671	-0,429	-3,3
14			c2=	0,11		0,5	-0,429	0,071	0,5
15							c1=	9,956	
16							c2=	0,084	
17							c3=	0,004	

Рис. 1. Вычисление коэффициентов первого и второго трендов

Решим систему методом Гаусса. Разделим первое уравнение на a_{11} :

$B_{11} \rightarrow 1$;

$C_{11} \rightarrow =C8/\$B\8 .

Формулу из ячейки C11 распространяем вправо на ячейку D11.

Далее из второго уравнения вычтем первое, умноженное на a_{21} :

$C_{12} \rightarrow =C9-C_{11}*\$B\$9$.

Формулу из ячейки C12 распространяем вправо на ячейку D12.

Вычислим неизвестные:

$D_{14} \rightarrow =D_{12}/C_{12}$;

$D_{13} \rightarrow =D_{11}-C_{11}*D_{14}$.

Теперь вычислим коэффициенты квадратичного тренда c_1 , c_2 и c_3 , используя систему (5). Для коэффициентов системы (5) понадобится вычислять сумму t_k^4 , поэтому сделаем вспомогательные вычисления. Добавим еще одну строку с заголовком « t_k^2 » и посчитаем для нее данные по формуле

$B5 \rightarrow =B3^2$,

которую распространим вправо для всех пяти лет.

Для этого также сформируем сначала матрицу системы (рис. 1):

$a_{11} = n$;

$F8 \rightarrow 5$

$a_{12} = a_{21} = \sum_{k=1}^5 t_k$;

$G8 \rightarrow =\text{СУММ}(B3:F3)$; $F9 \rightarrow =G8$;

$a_{13} = a_{31} = \sum_{k=1}^5 t_k^2$;

$H8 \rightarrow =\text{СУММКВ}(B3:F3)$; $F10 \rightarrow =H7$;

$$a_{22} = \sum_{k=1}^5 t_k^2;$$

$$G9 \rightarrow =H8;$$

$$a_{23} = a_{32} = \sum_{k=1}^5 t_k^3;$$

$$H9 \rightarrow =\text{СУММПРОИЗВ}(B5:F5;B3:F3);$$

$$a_{33} = \sum_{k=1}^5 t_k^4;$$

$$H10 \rightarrow =\text{СУММКВ}(B5:F5);$$

$$b_1 = \sum_{k=1}^5 y_k;$$

$$I8 \rightarrow =\text{СУММ}(B4:F4);$$

$$b_2 = \sum_{k=1}^5 t_k y_k;$$

$$I9 \rightarrow =\text{СУММПРОИЗВ}(B4:F4;B3:F3);$$

$$b_3 = \sum_{k=1}^5 t_k^2 y_k;$$

$$I10 \rightarrow =\text{СУММПРОИЗВ}(B4:F4;B5:F5).$$

Решим матричную систему матричным методом:

$$1) F12 \rightarrow =\text{МОБР}(F8:H10),$$

2) выделяем диапазон F8:H10, размещаем курсор в строке формул и нажимаем одновременно Ctrl, Shift, Enter.

Теперь сравним расчеты реального объема продукции по заданной формуле (1) и по формулам (2) и (3). Для этого на листе Excel сформируем дополнительно еще одну таблицу (рис. 2), куда скопируем уже рассчитанный объем выпуска продукции по формулам (1) и вычислим объем продукции при использовании построенных трендов:

$$B21 \rightarrow =B24;$$

$$B22 \rightarrow =\$D\$13+\$D\$14*B20;$$

$$B23 \rightarrow =\$H\$15+\$H\$16*B20+\$H\$17*B20^2.$$

Полученные формулы распространим вправо, заполняя диапазон B21:G23.

	A	B	C	D	E	F	G
19	Объем выпуска продукции						
20	Месяц t_k	1	2	3	4	5	6
21	Объем выпуска y_k	10,04	10,16	10,22	10,38	10,48	
22	Линейный тренд	10,036	10,15	10,26	10,37	10,476	10,59
23	Квадратичный тренд	10,045	10,14	10,25	10,36	10,485	10,62
24	Погреш. лин. тренда в точках	0,0004	0,001	0,004	0,001	0,0004	
25	Погреш. кв. тренда в точках	0,0005	0,002	0,003	0,002	0,0004	
26	Погреш. лин. тренда	0,0035					
27	Погреш. кв. тренда	0,0027					

Рис. 2. Сравнение моделей

Вычислим погрешность по годам по формулам (6) и (7) соответственно для линейного тренда и квадратичного:

$$B24 \rightarrow =ABS(B22-B21)/B21;$$

$$B25 \rightarrow =ABS(B23-B21)/B21,$$

где функция ABS(число) вычисляет модуль аргумента. Растягиваем формулы вправо.

Найдем погрешность вычисления:

– для линейного тренда $B26 \rightarrow =МАКС(B24:F24)$;

– для квадратичного тренда $B27 \rightarrow =МАКС(B25:F25)$.

Сравнивая значения погрешностей, можно сделать вывод, что использование квадратичного тренда в данном случае лучше, так как погрешность вычислений для него меньше (0,0027 или 0,27 %).

Выполним прогноз для шестого месяца. Добавим в строку «Месяц t_k » еще одно число, выделим ячейки F22:F23 и сместим формулу вправо, используя маркер автозаполнения. Из расчетов видно, что линейный тренд прогнозирует объем выпуска 10,59 тыс. шт., а квадратичный 10,62 тыс. шт.

Задание

1. Используя формулу (1), найти для заданных значений p и q объем выпуска продукции y_k , $k = \overline{1, 5}$, и построить табл. 1.
2. Решить задачу, используя линейный тренд вида (2). Рассчитать коэффициенты для системы (4) и, применяя формулу (2), вычислить значения $f_1(t_k)$, $k = \overline{1, 6}$.
3. Решить задачу, используя квадратичный тренд вида (3). Рассчитать коэффициенты для системы (5) и, применяя формулу (3), вычислить значения $f_2(t_k)$, $k = \overline{1, 6}$.
4. Определить погрешность прогнозирования при применении линейного тренда.
5. Определить погрешность прогнозирования при применении квадратного тренда.
6. Сравнить полученные погрешности при использовании линейного и квадратичного трендов.
7. Построить графики изменения реального объема выпуска (значение функцию y_k , $k = \overline{1, 5}$), линейного тренда (функцию $f_1(t)$), квадратичного тренда (функцию $f_2(t)$).
8. Найти прогнозируемое значение выпуска в шестом месяце.
9. Записать выводы.

Варианты заданий:

Таблица 2.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p	0	1	1	1	2	2	2	0	3	3	1	0	3	3	2
q	1	0	1	2	1	2	0	2	3	1	3	3	0	2	3

Задание № 3. Задача распределения неоднородных ресурсов.

Составление оптимального плана выпуска продукции

Краткая теория

Пусть некоторое предприятие обладает ресурсами S_1, S_2, \dots, S_n в количествах соответственно b_1, b_2, \dots, b_n единиц. Используя данные ресурсы, предприятие может изготовить изделия I_1, I_2, \dots, I_m , при этом известны величины a_{ij} , – количество i -го ресурса, идущего на изготовление одного изделия j -го вида ($i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$). Кроме того, известны величины c_j –прибыль, получаемая предприятием от реализации одного изделия j -го вида.

Требуется составить план выпуска изделий, при котором достигается максимальная суммарная прибыль предприятия (прибыль от реализации всех изделий).

Для решения поставленной задачи сформулируем её математическую модель, первоначально сведя исходные данные в следующую таблицу:

Вид ресурса	Запас ресурса	Расход ресурса на изготовления одного изделия			
		I_1	I_2	...	I_m
S_1	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1m}
S_2	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2m}
...
S_n	b_n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nm}
Прибыль от реализации одного изделия		c_1	c_2	...	c_m

Математическая модель задачи распределения неоднородных ресурсов. Для построения математической модели задачи:

1. Определим неизвестные и их количество.

Введем следующие обозначения: пусть x_1, x_2, \dots, x_m – количество изделий I_1, I_2, \dots, I_m , которые может производить предприятие. Поэтому количество рассматриваемых переменных – m штук.

2. Запишем целевую функцию, зависящую от x_1, x_2, \dots, x_m и что с ней необходимо сделать (максимизировать или минимизировать).

В данной задаче целевая функция – суммарная прибыль, получаемая предприятием от реализации всех произведенных изделий, может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_m) &= c_1 * x_1 + c_2 * x_2 + \dots + c_m * x_m = \\ &= \sum_{j=1}^m c_j * x_j \rightarrow \max. \end{aligned} \quad (1)$$

3. Сформулируем ограничения рассматриваемой задачи.

3.1. Ограничения по запасам сырья. Зная количество сырья каждого вида, идущее на изготовление одной единицы изделия, и запасы сырья можно составить следующую систему ограничений:

$$\begin{cases} \text{Ресурс}S_1 : a_{11} * x_1 + a_{12} * x_2 + \dots + a_{1m} * x_m \leq b_1; \\ \text{Ресурс}S_2 : a_{21} * x_1 + a_{22} * x_2 + \dots + a_{2m} * x_m \leq b_2; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \text{Ресурс}S_n : a_{n1} * x_1 + a_{n2} * x_2 + \dots + a_{nm} * x_m \leq b_n. \end{cases} \quad (2)$$

Полученная система устанавливает, что количество сырья, расходуемое на изготовление всех изделий, не может превысить имеющихся на предприятии запасов сырья.

3.2. Условие неотрицательности переменных. Исходя из физического смысла, на переменные налагаются дополнительные условия, требующие неотрицательности их значений:

$$\begin{cases} x_1 \geq 0; \\ x_2 \geq 0; \\ \dots \\ x_n \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

При этом равенство нулю соответствующей переменной означает, что данное изделие не выпускается.

3.3 Условие целочисленности переменных. На переменные можно накладывать дополнительное условие целочисленности, которое “запрещает” выпуск не целых изделий:

$$\begin{cases} x_1 - \text{целое}; \\ x_2 - \text{целое}; \\ \dots \\ x_n - \text{целое}. \end{cases} \quad (4)$$

Таким образом, целевая функция (1) и ограничения (2) – (4) образуют математическую модель задачи распределения неоднородных ресурсов.

Пример выполнения задания

Постановка задачи. Пусть предприятие располагает запасами сырья трех видов – цемент, щебень и арматура в количествах $b_1=18$, $b_2=120$ и $b_3=42$ условных единиц соответственно. Из этого сырья может быть изготовлено два вида изделий – плиты перекрытия и фундаментные блоки. Известны также значения a_{ij} – количество единиц i -го вида сырья, идущего на изготовление единицы j -го изделия и c_j – доход, получаемый от реализации одной единицы изделия каждого вида ($i=1,2,3$; $j=1,2$). Все указанные величины представлены в табл. 1.

Таблица 1. Данные к задаче составления оптимального плана

Вид сырья	Запас сырья (усл. единиц)	Расход сырья на единицу продукции (усл. единиц)	
		Плита перекрытия	Фундаментный блок
Цемент	$b_1 = 18$	$a_{11} = 3$	$a_{12} = 1$
Щебень	$b_2 = 120$	$a_{21} = 25$	$a_{22} = 3$
Арматура	$b_3 = 42$	$a_{31} = 0$	$a_{32} = 3$
Прибыль от продажи единицы изделия (усл.ден. единиц)		$c_1 = 3$	$c_2 = 2$

Требуется составить такой план выпуска продукции, при котором суммарная прибыль предприятия от реализации всей продукции была бы максимальной.

Для решения сформулированной задачи составим ее математическую модель.

Математическая модель задачи распределения неоднородных ресурсов. Для построения математической модели задачи:

1. Определим неизвестные и их количество.

Введем следующие обозначения: x_1 – количество плит перекрытия, x_2 – количество фундаментных блоков, которые может выпускать предприятие.

2. Запишем целевую функцию.

Суммарная прибыль, получаемая предприятием от реализации x_1 единиц плит перекрытия и x_2 единиц фундаментных блоков, может быть записана в виде

$$F(x_1, x_2) = 3 * x_1 + 2 * x_2 \rightarrow \max. \quad (1')$$

3. Сформулируем ограничения рассматриваемой задачи.

3.1. Ограничения по запасам сырья. Зная количество сырья каждого вида, идущее на изготовление одной единицы изделия, и запасы сырья можно составить следующую систему ограничений:

$$\begin{cases} 3 * x_1 + 1 * x_2 \leq 18; \\ 25 * x_1 + 3 * x_2 \leq 120; \\ 0 * x_1 + 3 * x_2 \leq 42. \end{cases} \quad (2')$$

Полученная система устанавливает, что количество каждого сырья, расходуемое на изготовление изделий, не может превысить имеющихся на предприятии запасов сырья.

3.2. Условие неотрицательности переменных. Исходя из физического смысла, на переменные налагаются дополнительные условия, требующие неотрицательности их значений:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad (3')$$

(x_1 и x_2 равны нулю, если соответствующий вид изделия не выпускается).

3.3 Условие целочисленности переменных. На переменные x_1 и x_2 можно накладывать дополнительное условие целочисленности, которое “запрещает” выпуск не целых изделий:

$$x_1 \text{ и } x_2 - \text{целые} \quad (4')$$

Таким образом, целевая функция (1') и ограничения (2') – (4') образуют математическую модель задачи распределения неоднородных ресурсов.

Решение задачи в среде ЭТ MS Excel. Для решения задачи с помощью надстройки Поиск решения в среде ЭТ MS Excel необходимо:

1. На листе, с именем Оптимальный план, создайте таблицу, подобную таблице математической постановки задачи. Таблица отличается от таблицы 1 наличием столбца «Расход сырья». В него будут занесены левые части ограничений по запасам сырья (см. пункт 3.1) и в результате решения рассматриваемой задачи будут найдены фактические расходы сырья каждого вида. Добавьте столбец «Остаток сырья» для занесения в ячейки столбца соответствующих формул.

2. Создайте вторую таблицу, указав в ней выпускаемые изделия и переменные математической модели. В ячейках E10:F10 поместите нулевые (начальные) значения искомых переменных x_1 и x_2 .

3. В ячейку F12 введите формулу целевой функции, которая для решаемой задачи имеет вид $= E6 * E10 + F6 * F10$. Завершив ввод нажатием клавиши Enter, получим в ячейке F12 нулевое значение, т.к. пока равны нулю значения переменные x_1 и x_2 .

4. Введите формулу $=E3*E10+F3*F10$ для ограничения по цементу в ячейку C3. Завершив ввод нажатием клавиши Enter, получим в ячейке C3 нулевое значение, т.к. пока равны нулю переменные x_1 и x_2 . Скопируйте эту формулу, автозаполнением, в ячейки C4 и C5, предварительно заменив относительную ссылку на ячейки E10 и F10 на абсолютную при помощи клавиши F4. При этом формула примет вид $=E3*\$E\$10+F3*\$F\10 , а в ячейках C4 и C5 снова получим нулевые значения. В ячейку D3 занесите формулу вычисления остатков сырья первого вида $=B3-C3$ и скопируйте ее автозаполнением в ячейки D4 и D5.

E12		fx		=E6*E10+F6*F10		
	A	B	C	D	E	F
1	Вид сырья	Запас сырья	Расход сырья	Остаток сырья	Расход сырья на 1 изделие	
2					плита перекрытия	фундаментный блок
3	цемент	18	0	18	3	1
4	щебень	120	0	120	25	3
5	арматура	42	0	42	0	3
6	Прибыль от реализации изделия (тыс.руб)				3	2
7						
8		Выпускаемое изделие			плита	блок
9		Перем. мат. модели			x_1	x_2
10		Кол-во выпускаемых изделий (шт.)			0	0
11						
12	Суммарная прибыль $F(x_1, x_2) =$				0	тыс.руб.
13						
14						

5. Наберите команду Данные → Поиск решения. В появившемся диалоговом окне надстройки Поиск решения необходимо выполнить три основные установки:

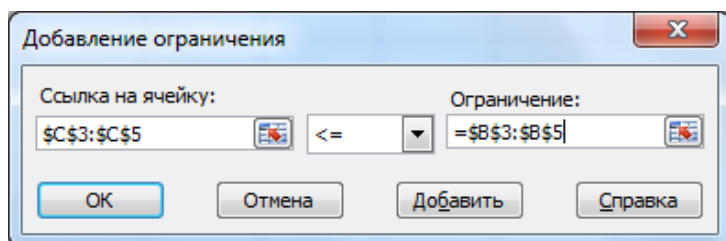
5.1. Заполните поле «Установить целевую ячейку». В зависимости от решаемой задачи, можно выбрать поиск наименьшего или наибольшего значения для целевой ячейки или же установить в ней конкретное числовое значение. Для рассматриваемой задачи выполните ссылку на ячейку F12, где записана формула целевой функции.

5.2. Установите радиокнопку «Равной максимальному значению».

5.3. Выполните ссылки на изменяемые ячейки E10 и F10, в которые помещены нулевые начальные значения искомых переменных x_1 и x_2 . Изменяемые ячейки – это те ячейки, значения в которых будут подбираться так, чтобы оптимизировать результат в целевой ячейке. Для Поиска решения можно указать до 200 изменяемых ячеек. К ним предъявляются два основных требования: они не должны содержать формул и изменение их значений должно приводить к изменению результата в целевой ячейке, т.е. целевая ячейка должна быть зависима от изменяемых.

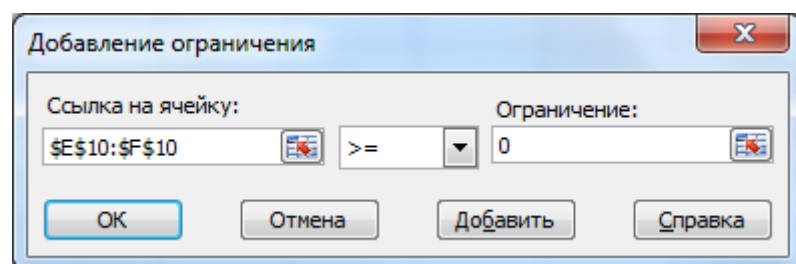
5.4. Введите ограничения по запасам сырья и естественные условия неотрицательности переменных x_1 и x_2 , для этого:

а) щелкните по кнопке «Добавить» диалогового окна и в появившемся окне «Добавление ограничения» выполните следующие установки:

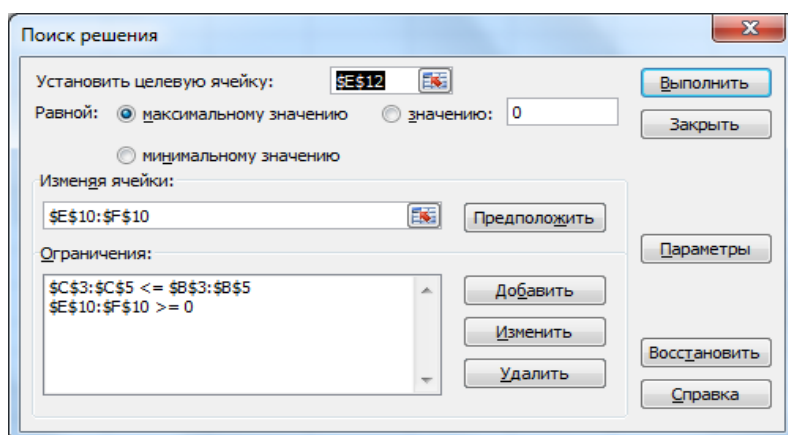


Задание таких ограничений означает, что расход сырья каждого вида на выполнение производственной программы не должен превышать его запаса на предприятии. Щелчок по кнопке ОК приводит к закрытию диалогового окна «Изменение ограничения», при этом само условие заносится в раздел «Ограничения:» диалогового окна надстройки Поиск решения.

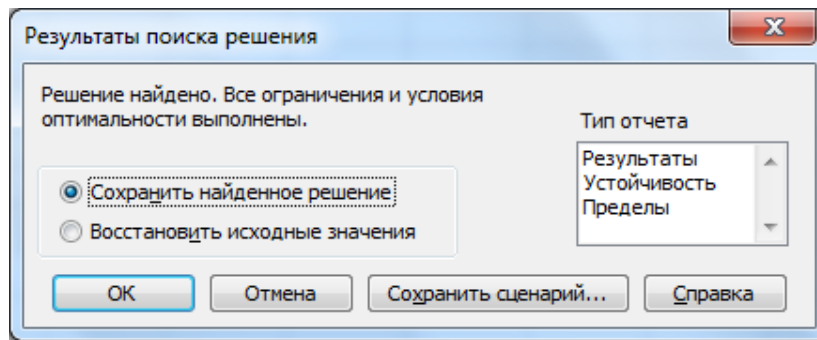
б) ещё раз щелкните по кнопке «Добавить» диалогового окна Поиск решения и в появившемся окне «Добавление ограничения» выполните следующие установки:



Задание таких условий обеспечивает неотрицательность переменных. Щелкните по кнопке ОК – все ограничения занесены, и диалоговое окно надстройки Поиск решения примет вид:



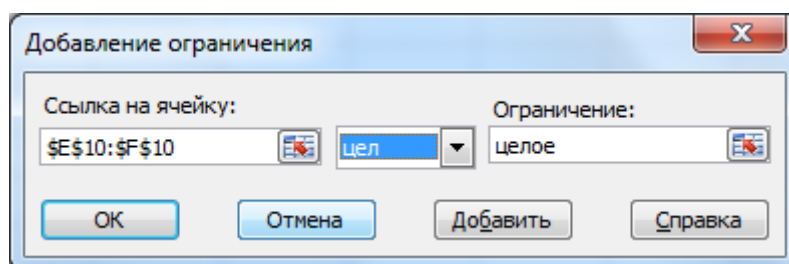
6. Щелкните по кнопке «Выполнить». Если решение найдено, то появится диалоговое окно:



щелчок по кнопке ОК позволяет сохранить найденное решение, имеющее для нашей задачи следующий вид:

18							
	A	B	C	D	E	F	G
1		Запас сырья	Расход сырья	Остаток сырья	Расход сырья на 1 изделие		
2	Вид сырья	сырья	сырья	сырья	плита перекрытия	фундаментный блок	
3	цемент	18	18	0	3	1	
4	щебень	120	75,333333	44,66666667	25	3	
5	арматура	42	42	0	0	3	
6	Прибыль от реализации изделия (тыс.руб)				3	2	
7							
8		Выпускаемое изделие			плита	блок	
9		Перем. мат.модели			x_1	x_2	
10		Кол-во выпускаемых изделий(шт.)			1,333333333	14	
11							
12	Суммарная прибыль $F(x_1, x_2) =$				32	тыс.руб.	
13							

Если для переменных x_1 и x_2 добавить условие целочисленности, “запрещающее” выпуск не целых изделий:



то искомое решение примет вид:

E7		fx					
	A	B	C	D	E	F	G
1	Вид сырья	Запас сырья	Расход сырья	Остаток сырья	Расход сырья на 1 изделие		
2					плита перекрытия	фундаментный блок	
3	цемент	18	17	1	3	1	
4	щебень	120	67	53	25	3	
5	арматура	42	42	0	0	3	
6	Прибыль от реализации изделия (тыс.руб)				3	2	
7							
8		Выпускаемое изделие			плита	блок	
9		Перем. мат.модели			x_1	x_2	
10		Кол-во выпускаемых изделий(шт.)			1	14	
11							
12	Суммарная прибыль $F(x_1, x_2) =$				31	тыс.руб.	
13							

Если задать дополнительное условие об обязательной поставке изделия Плиты перекрытий в количестве не менее 3 штук:

Поиск решения

Установить целевую ячейку:

Равной: ☒ максимальному значению ☐ значению:

☐ минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

то искомое решение примет вид:

E13		fx					
	A	B	C	D	E	F	G
1	Вид сырья	Запас сырья	Расход сырья	Остаток сырья	Расход сырья на 1 изделие		
2					плита перекрытия	фундаментный блок	
3	цемент	18	18	0	3	1	
4	щебень	120	102	18	25	3	
5	арматура	42	27	15	0	3	
6	Прибыль от реализации изделия (тыс.руб)				3	2	
7							
8		Выпускаемое изделие			плита	блок	
9		Перем. мат.модели			x_1	x_2	
10		Кол-во выпускаемых изделий(шт.)			3	9	
11							
12	Суммарная прибыль $F(x_1, x_2) =$				27	тыс.руб.	
13							

7. Сделайте выводы по выполненной работе.

8. Самостоятельно решите задачу составления оптимального плана выпуска продукции, в соответствии с вашим вариантом.

Исходные данные для самостоятельного решения

Для изготовления m видов изделий I_1, I_2, \dots, I_m необходимы ресурсы n видов: трудовые, материальные, финансовые и др. (S_1, S_2, \dots, S_n). Известно необходимое количество отдельного i -го ресурса для изготовления каждого j -го изделия. Назовем эту величину нормой расхода c_{ij} . Пусть определено количество каждого вида ресурса, которым предприятие располагает в данный момент, – b_i усл.ед. Известна прибыль p_j в рублях, получаемая предприятием от реализации каждой единицы j -го вида изделия.

Определить, какие изделия и в каком количестве должно изготавливать предприятие, чтобы обеспечить получение максимальной суммарной прибыли.

Вид ресурса	Количество ресурса	Норма расхода ресурса на единицу каждого вида изделия			
		I_1	I_2	...	I_m
S_1	b_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1m}
S_2	b_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2m}
...
S_n	b_n	c_{n1}	c_{n2}	...	c_{nm}
Прибыль от реализации единицы изделия (руб.)		p_1	p_2	...	p_m

Требуется:

- 1) выполнить математическую постановку задачи линейного программирования (ЗЛП);
- 2) решить ЗЛП в среде электронных таблиц Excel;
- 3) проанализировать результаты решения и сделать выводы.

Вариант №1

Вид ресурса	Количество ресурса	Норма расхода ресурса на единицу каждого вида изделия				
		I_1	I_2	I_3	I_4	I_5
S_1	350	2,2	1,4	3,3	1,8	2,7
S_2	300	2,2	0,9	2,1	3,5	1,5
S_3	170	1,9	2,4	2,9	1,2	2,2

Прибыль от реализации единицы изделия (руб.)	26	31	22	21	25
--	----	----	----	----	----

Вариант №2

Вид ресурса	Количество ресурса	Норма расхода ресурса на единицу каждого вида изделия			
		И ₁	И ₂	И ₃	И ₄
S ₁	450	3,6	1,4	3,3	0,5
S ₂	350	2,2	0,8	2,1	3,5
S ₃	170	1,9	0,4	2,9	1,2
S ₄	200	2,2	0,9	3,1	2,1
S ₅	230	5,7	4,6	2,7	3,6
Прибыль от реализации единицы изделия (руб.)		22	27	39	21

Вариант №3

Вид ресурса	Количество ресурса	Норма расхода ресурса на единицу каждого вида изделия				
		И ₁	И ₂	И ₃	И ₄	И ₅
S ₁	350	2,6	4,4	3,3	0,5	3,7
S ₂	300	2,2	0,8	2,1	3,5	1,5
S ₃	570	3,9	0,4	2,9	1,2	2,2
Прибыль от реализации единицы изделия (руб.)		32	21	29	21	15

Вариант №4

Вид ресурса	Количество ресурса	Норма расхода ресурса на единицу каждого вида изделия				
		И ₁	И ₂	И ₃	И ₄	И ₅
S ₁	450	3,6	1,4	3,3	2,5	2,7
S ₂	300	3,2	2,8	2,1	3,5	2,5
S ₃	470	2,9	1,4	2,9	1,2	2,2
S ₄	250	2,2	1,9	1,1	3,1	0,5

Прибыль от реализации единицы изделия (руб.)	47	27	29	21	25
--	----	----	----	----	----

Вариант №5

Вид ресурса	Количество ресурса	Норма расхода ресурса на единицу каждого вида изделия			
		И ₁	И ₂	И ₃	И ₄
S ₁	450	3,6	1,4	3,3	0,5
S ₂	300	2,2	5,8	2,1	3,5
S ₃	370	4,9	0,4	2,9	3,2
S ₄	200	2,2	0,9	5,1	2,1
S ₅	430	5,7	4,6	2,7	3,6
Прибыль от реализации единицы изделия (руб.)		22	21	19	21

Вариант №6

Вид ресурса	Количество ресурса	Норма расхода ресурса на единицу каждого вида изделия				
		И ₁	И ₂	И ₃	И ₄	И ₅
S ₁	250	3,6	6,4	3,3	4,5	2,7
S ₂	300	3,2	2,8	2,1	3,5	1,5
S ₃	470	1,9	4,4	2,9	1,2	2,2
S ₄	200	2,2	3,9	4,1	2,1	0,5
Прибыль от реализации единицы изделия (руб.)		32	26	29	27	15

Вариант №7

Вид ресурса	Количество ресурса	Норма расхода ресурса на единицу каждого вида изделия				
		И ₁	И ₂	И ₃	И ₄	И ₅
S ₁	450	2,6	5,4	3,3	5,5	2,7
S ₂	300	2,2	0,8	2,1	3,5	5,5
S ₃	470	3,9	0,4	2,9	1,2	2,2
S ₄	300	2,2	0,9	1,1	2,1	0,5

Прибыль от реализации единицы изделия (руб.)	32	21	39	27	15
--	----	----	----	----	----

Вариант №8

Вид ресурса	Количество ресурса	Норма расхода ресурса на единицу каждого вида изделия				
		И ₁	И ₂	И ₃	И ₄	И ₅
S ₁	250	3,6	1,4	3,3	3,5	2,7
S ₂	300	2,2	0,8	2,1	3,5	1,5
S ₃	470	3,9	0,4	2,9	3,2	2,2
S ₄	200	2,8	0,9	1,1	2,1	4,5
S ₅	330	5,7	4,6	2,7	3,6	3,1
Прибыль от реализации единицы изделия (руб.)		32	21	49	29	15

Вариант №9

Вид ресурса	Количество ресурса	Норма расхода ресурса на единицу каждого вида изделия			
		И ₁	И ₂	И ₃	И ₄
S ₁	450	3,6	1,4	3,3	3,5
S ₂	300	2,2	2,8	2,1	3,5
S ₃	570	4,9	2,4	2,9	4,2
Прибыль от реализации единицы изделия (руб.)		32	27	39	21

Вариант №10

Вид ресурса	Количество ресурса	Норма расхода ресурса на единицу каждого вида изделия			
		И ₁	И ₂	И ₃	И ₄
S ₁	350	5,6	3,4	3,3	2,5
S ₂	400	2,2	5,8	2,1	3,5
S ₃	570	4,9	0,4	2,9	6,2
S ₄	200	2,2	0,9	1,1	2,1
S ₅	330	5,7	4,6	2,7	3,6

Прибыль от реализации единицы изделия (руб.)	26	21	39	28
--	----	----	----	----

Задание № 4. Задача о смесях. Составление смеси бензина с заданными показателями качества

Краткая теория

В различных отраслях народного хозяйства возникает проблема составления таких рабочих смесей на основе исходных материалов, которые обеспечивали бы получение конечного продукта, обладающего определенными свойствами. К этой группе задач относятся задачи о выборе диеты, составлении кормового рациона в животноводстве, шихт в металлургии, горючих и смазочных смесей в нефтеперерабатывающей промышленности, смесей для получения бетона в строительстве и т. д.

Высокий уровень затрат на исходные сырьевые материалы и необходимость повышения эффективности производства выдвигает на первый план решение следующей задачи: требуется получить продукцию с заданными свойствами при наименьших затратах на исходные сырьевые материалы.

Для решения поставленной задачи сформулируем её математическую модель, первоначально сведя исходные данные в следующую таблицу:

Компоненты, входящие в состав материалов	Виды исходных материалов				Необходимое количество компонента в смеси
	1	2	...	m	
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1m}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2m}	b_2
...
n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nm}	b_n
Цена единицы материала	c_1	c_2	...	c_m	

Коэффициенты a_{ij} показывают удельный вес i -го компонента в единице j -го материала.

Для решения сформулированной задачи составим её математическую модель.

Математическая модель задачи о смесях. Для построения математической модели задачи:

1. Определим неизвестные и их количество.

Обозначим через x_j количество материала j -го вида, входящего в смесь $j = 1, 2, \dots, m$.

2. Запишем целевую функцию, удельную стоимость полученной смеси, которая имеет вид:

$$F(X) = \frac{1}{V} \cdot \sum_{j=1}^m c_j \cdot x_j \rightarrow \min. \quad (1)$$

3. Сформулируем ограничения рассматриваемой задачи.

3.1. Ограничения по минимально необходимому содержанию i -ой компоненты в готовой смеси:

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot x_j \geq b_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где b_i – минимально необходимое содержание i -ой компоненты в готовой смеси.

3.2. Кроме того, на переменные x_j накладываются условия неотрицательности:

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (3)$$

где равенство нулю означает, что данный компонент не входит в смесь.

Таким образом, целевая функция (1) и ограничения (2–3) образуют математическую модель задачи о смесях.

Пример выполнения задания

Постановка задачи. Стандартом предусмотрено, что октановое число автомобильного бензина А-76 должно быть не ниже 76, а содержание серы в нем – не более 0,003%. Для изготовления такого бензина на заводе используется смесь из четырех компонентов. Данные о ресурсах смешиваемых компонентов, их себестоимости и их октановом числе, а также о содержании серы приведены в таблице 1:

Таблица 1. Данные к задаче о смеси бензина

Характеристики компонентов	Компоненты автомобильного бензина			
	№1	№2	№3	№4
Октановое число	68	72	80	90
Содержание серы, %	0,0035	0,0035	0,0030	0,0020
Запасы ресурса, т	700	600	500	300
Себестоимость, ден.ед./т	40	45	60	90

Требуется определить, сколько тонн каждого компонента следует использовать для получения 1000 т автомобильного бензина А-76, чтобы его себестоимость была минимальной.

Для решения сформулированной задачи составим ее математическую модель.

Математическая модель задачи о смесях. Для построения математической модели задачи:

1. Определим неизвестные и их количество.

Введем следующие обозначения: пусть x_j – количество в смеси компонента с номером j ($j = 1, 2, 3, 4$).

2. Запишем целевую функцию.

В качестве целевой функции выступает себестоимость полученной смеси, которую необходимо минимизировать:

$$F(X) = 1/1000*(40*x_1 + 45*x_2 + 60*x_3 + 90*x_4) \rightarrow \min. \quad (1')$$

3. Сформулируем ограничения рассматриваемой задачи.

3.1. По количеству получаемого бензина:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000. \quad (2')$$

3.2. По октановому числу:

$$(68*x_1 + 72*x_2 + 80*x_3 + 90*x_4)/1000 \geq 76. \quad (3')$$

3.3. По содержанию серы:

$$(0,0035*x_1 + 0,0035*x_2 + 0,003*x_3 + 0,002*x_4)/1000 \leq 0,003. \quad (4')$$

3.4. Условие неотрицательности рассматриваемых переменных:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \quad (5')$$

Таким образом, целевая функция (1') и ограничения (2'–5') образуют математическую модель задачи о смеси бензина.

Решение задачи в среде ЭТ MS Excel. Для решения задачи с помощью надстройки Поиск решения в среде ЭТ MS Excel необходимо:

1. Создайте таблицу для ввода условий задачи и введите исходные данные.

2. Создайте вторую таблицу, указав в ней Количество компонентов в смеси с пока нулевыми значениями

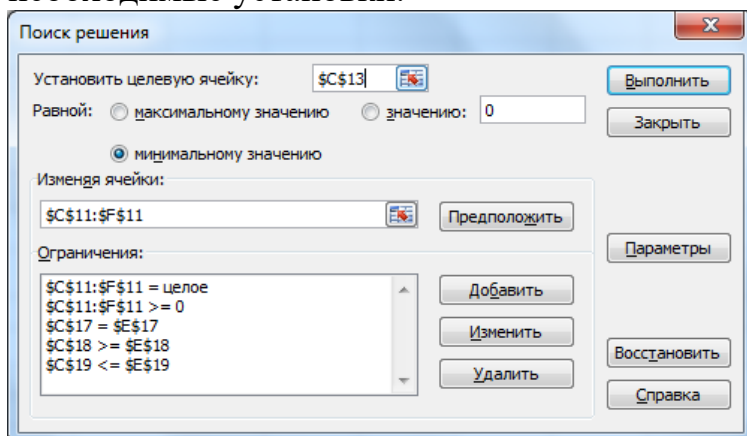
3. В ячейку C13 введите формулу целевой функции. Завершив ввод нажатием клавиши Enter, получим в ячейке C12 нулевое значение, т.к. пока равны нулю переменные x_1, x_2, x_3 и x_4 .

C13		=1/1000*(C7*C11+D7*D11+E7*E11+F7*F11)					
	A	B	C	D	E	F	G
1		Компоненты:					
2		Характеристика	Компоненты автомобильного бензина				
3			№1	№2	№3	№4	
4		Октановое число	68	72	80	90	
5		Содержание серы, %	0,0035	0,0035	0,003	0,002	
6		Ресурсы, тонн	700	600	500	300	
7		Себестоимость, тыс.ден.ед./тонна	40	45	60	90	
8							
9		Количество компонента в смеси:					
10		Переменные мат. модели	x1	x2	x3	x4	
11		Количество компонента в смеси, тонн	0	0	0	0	
12							
13		Целевая функция F(X)=	0	тыс.ден.ед./тонна			
14							

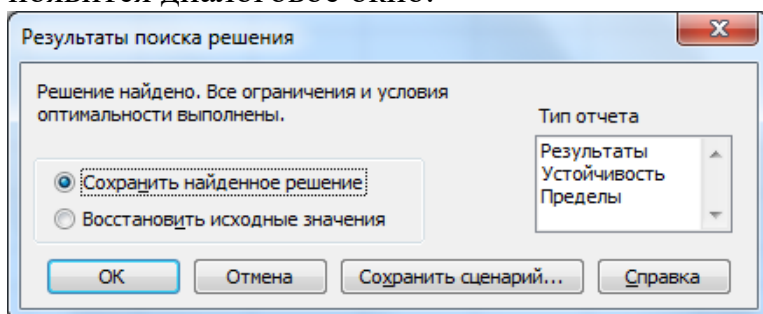
4. Далее наберите таблицы ограничений и остатков ресурса.

C17		f _x =C11+D11+E11+F11				
	A	B	C	D	E	F
13		Целевая функция F(X)=	0	тыс.ден.ед./тонна		
14						
15		Ограничения:				
16		Параметр	Фактическое значение	Знак отношения	Заданное значение	
17		Кол-во бензина А-76	0,000	=	1000	тонн
18		Октановое число	0,000	≥	76	
19		Содержание серы,%	0,00000	≤	0,003	%
20						
21		Остатки ресурса:				
22			Компоненты автомобильного бензина			
23			№1	№2	№3	№4
24			700	600	500	300

5. Наберите команду Данные → Поиск решения. В появившемся диалоговом окне надстройки Поиск решения необходимо выполнить необходимые установки.



6. Щелкните по кнопке «Выполнить». Если решение найдено, то появится диалоговое окно.



Щелчок по кнопке ОК позволяет сохранить найденное оптимальное решение, имеющее следующий вид:

C18		$f_x = (C4 \cdot C11 + D4 \cdot D11 + E4 \cdot E11 + F4 \cdot F11) / 1000$					
	A	B	C	D	E	F	G
7		Себестоимость, тыс.ден.ед./тонна	40	45	60	90	
8							
9		Количество компонента в смеси:					
10		Переменные мат. модели	x1	x2	x3	x4	
11		Количество компонента в смеси, тонн	571	0	143	286	
12							
13		Целевая функция F(X)=	57	тыс.ден.ед./тонна			
14							
15		Ограничения:					
16		Параметр	Фактическое значение	Знак отношения	Заданное значение		
17		Кол-во бензина А-76	1000,000	=	1000	тонн	
18		Октановое число	76,008	≥	76		
19		Содержание серы, %	0,00300	≤	0,003	%	
20							
21		Остатки ресурса:					
22		Компоненты автомобильного бензина					
23			№1	№2	№3	№4	
24			129	600	357	14	

7. Сделайте выводы по выполненной работе.

Исходные данные для самостоятельного решения

Требуется:

- 1) выполнить математическую постановку задачи составления смеси бензина как задачи линейного программирования (ЗЛП);
- 2) решить ЗЛП в среде электронных таблиц MS Excel.

Вариант №1

Характеристики компонент для производства бензина	Компоненты для производства бензина				Кол-во получаемого бензина и его показатели качества
	№1	№2	№3	№4	
Октановое число	67	75	82	94	≥ 76
Содержание свинца, г/л	0,0122	0,011	0,009	0,008	≤ 0,013
Содержание серы, %	0,07	0,06	0,05	0,045	≤ 0,06
Ресурсы, тонн	200	300	400	400	Необходимое кол-во бензина 800 тонн
Себестоимость, тыс.руб./тонна	10,5	11	12	14	

Вариант №2

Характеристики компонент для производства бензина	Компоненты для производства бензина				Кол-во получаемого бензина и его показатели качества
	№1	№2	№3	№4	
Октановое число	67	75	82	94	≥ 76
Содержание свинца, г/л	0,013	0,012	0,011	0,009	≤ 0,011
Содержание серы, %	0,08	0,06	0,05	0,04	≤ 0,05
Ресурсы, тонн	300	200	100	300	Необходимое кол-во бензина 700 тонн
Себестоимость, тыс.руб./тонна	10	11,5	12	14,5	

Вариант №3

Характеристики компонент для	Компоненты для производства бензина				Кол-во получаемого бензина и его
---------------------------------	--	--	--	--	-------------------------------------

производства бензина	№1	№2	№3	№4	показатели качества
Октановое число	65	75	8	95	≥ 76
Содержание свинца, г/л	0,011	0,010	0,009	0,009	$\leq 0,011$
Содержание серы, %	0,07	0,06	0,04	0,03	$\leq 0,05$
Ресурсы, тонн	700	200	800	300	Необходимое кол-во бензина 1200 тонн
Себестоимость, тыс.руб./тонна	9	11	12,8	14,5	

Вариант №4

Характеристики компонент для производства бензина	Компоненты для производства бензина			Кол-во получаемого бензина и его показатели качества
	№1	№2	№3	
Октановое число	67	75	82	≥ 76
Содержание свинца, г/л	0,013	0,012	0,011	$\leq 0,0125$
Содержание серы, %	0,08	0,06	0,05	$\leq 0,06$
Ресурсы, тонн	300	200	400	Необходимое кол-во бензина 800 тонн
Себестоимость, тыс.руб./тонна	10,5	11,5	13	

Вариант №5

Характеристики компонент для производства бензина	Компоненты для производства бензина				Кол-во получаемого бензина и его показатели качества
	№1	№2	№3	№4	
Октановое число	90	95	80	97	≥ 82
Содержание свинца, г/л	0,014	0,012	0,015	0,007	$\leq 0,011$
Содержание серы, %	0,06	0,05	0,065	0,03	$\leq 0,04$
Ресурсы, тонн	300	200	400	500	Необходимое кол-во бензина 1000 тонн
Себестоимость, тыс.руб./тонна	10	11,5	12	14,5	

Вариант №6

Характеристики компонент для производства бензина	Компоненты для производства бензина				Кол-во получаемого бензина и его показатели качества
	№1	№2	№3	№4	
Октановое число	66	75	82	94	≥ 76
Содержание свинца, г/л	0,014	0,012	0,010	0,009	$\leq 0,013$
Содержание серы, %	0,08	0,065	0,05	0,04	$\leq 0,06$
Ресурсы, тонн	300	200	200	700	Необходимое кол-во бензина 900 тонн
Себестоимость, тыс.руб./тонна	10,9	11	12,5	14,5	

Вариант №7

Характеристики компонент для производства бензина	Компоненты для производства бензина			Кол-во получаемого бензина и его показатели качества
	№1	№2	№3	
Октановое число	80	90	98	≥ 92
Содержание свинца, г/л	0,014	0,012	0,009	$\leq 0,013$
Содержание серы, %	0,06	0,055	0,042	$\leq 0,05$
Ресурсы, тонн	300	400	500	Необходимое кол-во бензина 1000 тонн
Себестоимость, тыс.руб./тонна	10,3	11,5	14,9	

Вариант №8

Характеристики компонент для производства бензина	Компоненты для производства бензина				Кол-во получаемого бензина и его показатели качества
	№1	№2	№3	№4	
Октановое число	70	75	80	95	≥ 76
Содержание свинца, г/л	0,012	0,0125	0,011	0,009	$\leq 0,012$
Содержание серы, %	0,08	0,06	0,05	0,035	$\leq 0,06$
Ресурсы, тонн	300	200	100	300	Необходимое кол-во бензина 1000 тонн
Себестоимость, тыс.руб./тонна	10,5	11,5	15,2	18,5	

Вариант №9

Характеристики компонент для производства бензина	Компоненты для производства бензина				Кол-во получаемого бензина и его показатели качества
	№1	№2	№3	№4	
Октановое число	66	75	80	95	≥ 76
Содержание свинца, г/л	0,014	0,0125	0,011	0,009	$\leq 0,013$
Содержание серы, %	0,08	0,06	0,05	0,04	$\leq 0,06$
Ресурсы, тонн	300	900	800	500	Необходимое кол-во бензина 1500 тонн
Себестоимость, тыс.руб./тонна	10,3	12	15,2	20	

Вариант №10

Характеристики компонент для производства бензина	Компоненты для производства бензина			Кол-во получаемого бензина и его показатели качества
	№1	№2	№3	
Октановое число	67	85	96	≥ 92
Содержание свинца, г/л	0,013	0,012	0,011	$\leq 0,012$
Содержание серы, %	0,07	0,05	0,04	$\leq 0,05$
Ресурсы, тонн	300	500	900	

Задание № 5. Использование мощностей оборудования

Краткая теория

Предприятие имеет n моделей машин M_1, M_2, \dots, M_n различных мощностей. На этих машинах предприятие выпускает m видов продукции P_1, P_2, \dots, P_m . Известны производительность каждой i -ой машины по выпуску j -го вида продукции – b_{ij} и стоимость единицы времени, затрачиваемого i -ой машиной на выпуск одного изделия j -го вида продукции – c_{ij} .

Задан план по времени и номенклатуре: T – время работы каждой машины, при этом, продукции j -го вида должно быть выпущено не менее N_j единиц.

Требуется составить такой план работы оборудования, чтобы обеспечить минимальные затраты на производство.

Для решения поставленной задачи сформулируем её математическую модель, первоначально сведя исходные данные в следующую таблицу:

Машины	Производительность i-ой машины при производстве j-го вида продукции			
	Виды продукции:			
	П ₁	П ₂	...	П _m
M ₁	b ₁₁	b ₁₂	...	b _{1m}
M ₂	b ₂₁	b ₂₂	...	b _{2m}
...
M _n	b _{n1}	b _{n2}	...	b _{nm}
Минимальный объем выпуска j-го вида продукции, N _j .	N ₁	N ₂	...	N _m

Машины	Стоимость единицы времени, затрачиваемого i-ой машиной на выпуск j-го вида продукции			
	Виды продукции:			
	П ₁	П ₂	...	П _m
M ₁	c ₁₁	c ₁₂	...	c _{1m}
M ₂	c ₂₁	c ₂₂	...	c _{2m}
...
M _n	c _{n1}	c _{n2}	...	c _{nm}

Для решения сформулированной задачи составим ее математическую модель.

Математическая модель задачи использования мощностей оборудования. Для построения математической модели задачи:

1. Определим неизвестные и их количество.

Обозначим x_{ij} – время работы i-ой машины ($i=1,2,...,n$) по выпуску j-го вида продукции ($j=1,2,...,m$), обеспечивающее минимальные затраты на производство при соблюдении ограничений по общему времени работы машин T и заданному количеству продукции j-го вида N_j .

2. Запишем целевую функцию $F(X)$ – затраты на производство, которую необходимо минимизировать.

$$F(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min \quad (1)$$

3. Сформулируем ограничения рассматриваемой задачи.

3.1. Ограничение по времени работы каждой машины.

По условию задачи все машины работают заданное время T, поэтому данное ограничение можно представить в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = T, \quad i=1,2,...,n \quad (2)$$

3.2. Ограничение по заданному количеству продукции имеет вид:

$$\sum_{i=1}^n b_{ij} x_{ij} \geq N_j, \quad j=1,2,...,m \quad (3)$$

3.3. Условие неотрицательности переменных:

$$x_{ij} \geq 0 \quad (4)$$

Таким образом, целевая функция (1) и ограничения (2–4) образуют математическую модель задачи использования мощностей оборудования.

Пример выполнения задания

Постановка задачи. Предприятие имеет 3 станка M_1, M_2, M_3 различной производительности. На этих станках предприятие выпускает 4 вида продукции P_1, P_2, P_3, P_4 . Известны производительность каждой i -ой машины по выпуску j -го вида продукции b_{ij} и стоимость единицы времени, затрачиваемого i -й машиной на выпуск одного изделия j -го вида продукции – c_{ij} . Задан план по времени и номенклатуре: T – время работы каждой машины, при этом, продукции j -го вида должно быть выпущено не менее N_j единиц.

Требуется составить такой план работы оборудования, чтобы обеспечить минимальные затраты на производство. Числовые данные приведены в следующих таблицах.

Таблица 1. Данные для задачи использования мощностей

Машины	Производительность i -ой машины при производстве j -го вида продукции			
	Виды продукции:			
	P_1	P_2	P_3	P_4
M_1	0,28	0,46	0,12	0,51
M_2	0,32	0,38	0,16	0,43
M_3	0,25	0,42	0,09	0,46
Минимальный объем выпуска j -го вида продукции, N_j	350	300	60	100

Таблица 2. Данные для задачи использования мощностей

Машины	Стоимость единицы времени, затрачиваемого i -ой машины на выпуск j -го вида продукции			
	Виды продукции:			
	P_1	P_2	P_3	P_4
M_1	0,21	0,22	0,41	0,32
M_2	0,18	0,19	0,35	0,29
M_3	0,37	0,25	0,48	0,51

Все станки работают заданное время T , равное 1000 временных единиц.

Математическая модель задачи использования мощностей оборудования. Для построения математической модели задачи:

1. Определим неизвестные и их количество:

Обозначим x_{ij} – время работы i -го станка ($i=1,2,3$) по выпуску j -го вида продукции ($j=1,2,3,4$), обеспечивающее минимальные затраты на производство при соблюдении ограничений по общему времени работы машин T и заданному количеству продукции N_j .

2. Определим целевую функцию $F(X)$ – суммарные затраты на производство, которую необходимо минимизировать.

$$F(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} \cdot x_{ij} = 0,21 \cdot x_{11} + 0,22 \cdot x_{12} + \dots + 0,51 \cdot x_{34} \rightarrow \min \quad (1)$$

3. Запишем ограничения нашей задачи:

3.1. Ограничение по времени работы каждой машины.

По условию задачи станки работают заданное время T , поэтому данное ограничение можно представить в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = T, \quad i=1,2,3 \quad (2)$$

3.2. Ограничение по заданному количеству продукции имеет вид:

$$\sum_{i=1}^n b_{ij} x_{ij} \geq N_j, \quad j=1,2,3,4 \quad (3)$$

3.3. Условие не отрицательности переменных:

$$x_{ij} \geq 0 \quad (4)$$

Таким образом, целевая функция (1) и ограничения (2–4) образуют математическую модель задачи использования мощностей оборудования.

В данной постановке задачи предполагается, что количество выпускаемой продукции должно быть, по крайней мере, не менее N_j . В некоторых случаях не допускается превышение плана по номенклатуре; очевидно в этом случае в ограничениях по количеству продукции необходимо использовать знак равенства.

Решение задачи в среде ЭТ MS Excel. Для решения задачи с помощью надстройки Поиск решения в среде ЭТ MS Excel необходимо:

1. На листе, с именем Задача, создайте таблицу для ввода условий задачи и введите исходные данные.

B7		fx =СУММПРОИЗВ(B4:B6;B21:B23)			
	A	B	C	D	E
1	Машины	Производительность i-ой машины при производстве j-го вида продукции. Матрица B (кол./врем.ед.) с элементами b_{ij}			
2		Виды продукции:			
3		P_1	P_2	P_3	P_4
4	M_1	0,28	0,46	0,12	0,51
5	M_2	0,32	0,38	0,16	0,43
6	M_3	0,25	0,42	0,09	0,46
7	Общий выпуск продукции j-го вида	0	0	0	0
8	Знак отношения	\geq	\geq	\geq	\geq
9	Минимальный объём выпуска j-го вида продукции, N_j	350	300	60	100
10					
11	Машины	Стоимость единицы времени, затрачиваемого i-й машиной на выпуск одного изделия j-го вида продукции. Матрица C с элементами c_{ij}			
12		Виды продукции:			
13		P_1	P_2	P_3	P_4
14	M_1	0,21	0,22	0,41	0,32
15	M_2	0,18	0,19	0,35	0,29
16	M_3	0,37	0,25	0,48	0,51

2. Создайте ещё одну таблицу, указав в ней переменные математической модели. В ячейках B21:E23 поместите нулевые (начальные) значения искомых переменных.

3. В ячейку E25 введите формулу целевой функции. Завершив ввод нажатием клавиши Enter, получим в ячейке E25 нулевое значение, т.к. пока равны нулю переменные.

E25		=СУММПРОИЗВ(B14:E16;B21:E23)						
	A	B	C	D	E	F	G	H
17								
18	Машины	Время работы i- го станка по выпуску j - го вида продукции.				Суммарное время работы j-ой машины	Знак отношения	Нормативное время работы машины
19		Матрица X (врем.ед.) с элементами x_{ij}						
20		Виды продукции:						
		Π_1	Π_2	Π_3	Π_4			
21	M_1	0	0	0	0	0	=	1000
22	M_2	0	0	0	0	0	=	1000
23	M_3	0	0	0	0	0	=	1000
24								
25	Целевая функция F(X)- затраты на производство изделий:				0,0			

4. Наберите команду Данные → Поиск решения. В появившемся диалоговом окне Поиск решения необходимо выполнить необходимые установки.

Поиск решения

Установить целевую ячейку:

Равной: ☐ максимальному значению ☐ значению: ☐ минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

5. Щелкните по кнопке Выполнить. Если решение найдено, то появится диалоговое окно:

Результаты поиска решения

Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.

Тип отчета

☒ Сохранить найденное решение
☐ Восстановить исходные значения

Результаты
Устойчивость
Пределы

Щелчок по кнопке ОК позволяет сохранить найденное оптимальное решение, имеющее следующий вид:

Главная Вставка Разметка страницы Формулы Данные Рецензирование Вид Разработчик							
F21		=СУММ(B21:E21)					
	A	B	C	D	E	F	G
	Машины	Производительность i-ой машины при производстве j-го вида продукции.					
		Матрица B (кол./врем.ед.) с элементами b_{ij}					
		Виды продукции:					
		P_1	P_2	P_3	P_4		
1	M_1	0,28	0,46	0,12	0,51		
2	M_2	0,32	0,38	0,16	0,43		
3	M_3	0,25	0,42	0,09	0,46		
4	Общий выпуск продукции j-го вида	425	420	60	100		
5	Знак отношения	\geq	\geq	\geq	\geq		
6	Минимальный объем выпуска j-го вида продукции, N_j	350	300	60	100		
7	Машины	Стоимость единицы времени, затрачиваемого i-й машиной на выпуск одного изделия j-го вида продукции. Матрица C с элементами c_{ij}					
8		Виды продукции:					
9		P_1	P_2	P_3	P_4		
10	M_1	0,21	0,22	0,41	0,32		
11	M_2	0,18	0,19	0,35	0,29		
12	M_3	0,37	0,25	0,48	0,51		
13	Машины	Время работы i-го станка по выпуску j-го вида продукции. Матрица X (врем.ед.) с элементами x_{ij}				Суммарное время работы j-ой машины	Знак отношения
14		Виды продукции:					Нормативное время работы машины
15		P_1	P_2	P_3	P_4		
16	M_1	804	0	0	196	1000	= 1000
17	M_2	625	0	375	0	1000	= 1000
18	M_3	0	1000	0	0	1000	= 1000
19	Целевая функция F(X)- затраты на производство изделий:				725,3		

6. Сделайте выводы по выполненной работе.

Исходные данные для самостоятельного решения

Требуется:

- 1) Выполнить математическую постановку задачи загрузки оборудования как задачи линейного программирования (ЗЛП);
- 2) Решить ЗЛП в среде электронных таблиц MS Excel.

Вариант №1

Машины	Производительность i -ой машины при производстве j -го вида продукции. Матрица B с элементами b_{ij} .			
	Виды продукции:			
	P_1	P_2	P_3	P_4
M_1	0,22	0,55	0,42	0,78
M_2	0,32	0,38	0,17	0,43
Минимальный объем выпуска j -го вида продукции, N_j .	550	100	260	100

Машины	Стоимость единицы времени, затрачиваемого i -ой машины на выпуск j -го вида продукции. Матрица C с элементами c_{ij} .			
	Виды продукции:			
	P_1	P_2	P_3	P_4
M_1	0,25	0,32	0,47	0,42
M_2	0,58	0,10	0,38	0,29

Все машины работают заданное время $T=1000$ временных единиц.

Вариант №2

Машины	Производительность i -ой машины при производстве j -го вида продукции. Матрица B с элементами b_{ij} .		
	Виды продукции:		
	P_1	P_2	P_3
M_1	0,78	0,44	0,12
M_2	0,42	0,48	0,36
M_3	0,25	0,42	0,29
Минимальный объем выпуска j -го вида продукции, N_j .	500	250	260

Машины	Стоимость единицы времени, затрачиваемого i -ой машины на выпуск j -го вида продукции. Матрица C с элементами c_{ij} .		
	Виды продукции:		
	P_1	P_2	P_3
M_1	0,24	0,26	0,40
M_2	0,28	0,49	0,15
M_3	0,31	0,27	0,38

Все машины работают заданное время $T=1300$ временных единиц.

Вариант №3

Машины	Производительность i -ой машины при производстве j -го вида продукции. Матрица B с элементами b_{ij} .		
--------	--	--	--

	Виды продукции:		
	П ₁	П ₂	П ₃
М ₁	0,48	0,45	0,12
М ₂	0,47	0,78	0,35
Минимальный объем выпуска j-го вида продукции, N _j .	800	750	160

Машины	Стоимость единицы времени, затрачиваемого i-ой машины на выпуск j-го вида продукции. Матрица С с элементами с _{ij} .		
	Виды продукции:		
	П ₁	П ₂	П ₃
М ₁	0,25	0,27	0,47
М ₂	0,14	0,47	0,15

Все машины работают заданное время Т=1500 временных единиц.

Вариант №4

Машины	Производительность i-ой машины при производстве j-го вида продукции. Матрица В с элементами b _{ij} .			
	Виды продукции:			
	П ₁	П ₂	П ₃	П ₄
М ₁	0,58	0,25	0,20	0,55
М ₂	0,42	0,31	0,16	0,43
М ₃	0,25	0,42	0,19	0,45
Минимальный объем выпуска j-го вида продукции, N _j .	1350	1300	160	1100

Машины	Стоимость единицы времени, затрачиваемого i-ой машины на выпуск j-го вида продукции. Матрица С с элементами с _{ij} .			
	Виды продукции:			
	П ₁	П ₂	П ₃	П ₄
М ₁	0,22	0,23	0,44	0,32
М ₂	0,11	0,19	0,35	0,19
М ₃	0,32	0,22	0,28	0,51

Все машины работают заданное время Т=2900 временных единиц.

Вариант №5

Машины	Производительность i-ой машины при производстве j-го вида продукции. Матрица В с элементами b _{ij} .			
	Виды продукции:			
	П ₁	П ₂	П ₃	П ₄
М ₁	0,48	0,25	0,20	0,56
М ₂	0,41	0,34	0,16	0,43
Минимальный объем выпуска j-го вида продукции, N _j .	350	300	460	500

Машины	Стоимость единицы времени, затрачиваемого i-ой машины на выпуск j-го вида продукции. Матрица С с элементами c_{ij} .			
	Виды продукции:			
	П ₁	П ₂	П ₃	П ₄
М ₁	0,22	0,27	0,44	0,38
М ₂	0,17	0,19	0,38	0,19

Все машины работают заданное время $T=1900$ временных единиц.

Вариант №6

Машины	Производительность i-ой машины при производстве j-го вида продукции. Матрица В с элементами b_{ij} .		
	Виды продукции:		
	П ₁	П ₂	П ₃
М ₁	0,32	0,15	0,27
М ₂	0,42	0,35	0,16
Минимальный объем выпуска j-го вида продукции, N_j .	450	350	250

Машины	Стоимость единицы времени, затрачиваемого i-ой машины на выпуск j-го вида продукции. Матрица С с элементами c_{ij} .		
	Виды продукции:		
	П ₁	П ₂	П ₃
М ₁	0,20	0,37	0,44
М ₂	0,18	0,25	0,29

Все машины работают заданное время $T=1350$ временных единиц.

Вариант №7

Машины	Производительность i-ой машины при производстве j-го вида продукции. Матрица В с элементами b_{ij} .			
	Виды продукции:			
	П ₁	П ₂	П ₃	П ₄
М ₁	0,38	0,35	0,27	0,56
М ₂	0,44	0,34	0,20	0,43
Минимальный объем выпуска j-го вида продукции, N_j .	550	400	260	500

Машины	Стоимость единицы времени, затрачиваемого i-ой машины на выпуск j-го вида продукции. Матрица С с элементами c_{ij} .			
	Виды продукции:			
	П ₁	П ₂	П ₃	П ₄
М ₁	0,12	0,24	0,44	0,34
М ₂	0,25	0,19	0,23	0,19

Все машины работают заданное время $T=1800$ временных единиц.

Вариант №8

Машины	Производительность i-ой машины при производстве j-го вида продукции. Матрица В с элементами b_{ij} .			
--------	--	--	--	--

	Виды продукции:		
	П ₁	П ₂	П ₃
М ₁	0,22	0,17	0,24
М ₂	0,45	0,34	0,18
Минимальный объем выпуска j-го вида продукции, N _j .	350	450	550

Машины	Стоимость единицы времени, затрачиваемого i-ой машины на выпуск j-го вида продукции. Матрица С с элементами с _{ij} .		
	Виды продукции:		
	П ₁	П ₂	П ₃
М ₁	0,14	0,37	0,34
М ₂	0,41	0,27	0,19

Все машины работают заданное время Т=1450 временных единиц.

Вариант №9

Машины	Производительность i-ой машины при производстве j-го вида продукции. Матрица В с элементами b _{ij} .			
	Виды продукции:			
	П ₁	П ₂	П ₃	П ₄
М ₁	0,25	0,45	0,40	0,78
М ₂	0,32	0,37	0,17	0,43
Минимальный объем выпуска j-го вида продукции, N _j .	350	300	250	400

Машины	Стоимость единицы времени, затрачиваемого i-ой машины на выпуск j-го вида продукции. Матрица С с элементами с _{ij} .			
	Виды продукции:			
	П ₁	П ₂	П ₃	П ₄
М ₁	0,35	0,33	0,47	0,42
М ₂	0,54	0,17	0,34	0,25

Все машины работают заданное время Т=1200 временных единиц.

Вариант №10

Машины	Производительность i-ой машины при производстве j-го вида продукции. Матрица В с элементами b _{ij} .		
	Виды продукции:		
	П ₁	П ₂	П ₃
М ₁	0,48	0,40	0,22
М ₂	0,46	0,48	0,37
М ₃	0,24	0,41	0,29
Минимальный объем выпуска j-го вида продукции, N _j .	540	550	460

Машины	Стоимость единицы времени, затрачиваемого i-ой машины на выпуск j-го вида продукции.
--------	--

	Матрица С с элементами c_{ij} .		
	Виды продукции:		
	Π_1	Π_2	Π_3
M_1	0,34	0,16	0,44
M_2	0,24	0,19	0,15
M_3	0,37	0,47	0,28

Все машины работают заданное время $T=1350$ временных единиц.

Задание № 6. Экономико-математическая модель межотраслевого баланса (модель Леонтьева)

Краткая теория

Рассмотрим модель межотраслевого баланса, называемую еще моделью Леонтьева или моделью «затраты-выпуск».

Предположим, что производственный сектор народного хозяйства разбит на n отраслей (энергетика, машиностроение, сельское хозяйство и т.д.).

Рассмотрим отрасль i , $i = 1, 2, \dots, n$. Она выпускает некую продукцию за данный промежуток времени (например, за год) в объеме x_i , который еще называют валовым выпуском. Часть объема продукции x_i , произведенная i -ой отраслью используется для собственного производства в объеме x_{ii} , часть - поступает в остальные отрасли $j = 1, 2, \dots, n$ для потребления при производстве в объемах x_{ij} , и некоторая часть объемом y_i - для потребления в непроизводственной сфере, так называемый объем конечного потребления. Перечисленные сферы распределения валового продукта i -ой отрасли приводят к соотношению баланса

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} + y_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Введем коэффициенты прямых затрат a_{ij} , которые показывают, сколько единиц продукции i -ой отрасли затрачивается на производство одной единицы продукции в отрасли j . Тогда можно записать, что количество продукции, произведенной в отрасли i в объеме x_{ij} и поступающей для производственных нужд в отрасль j , равно

$$x_{ij} = a_{ij}x_j$$

Считаем сложившуюся технологию производства во всех отраслях неизменной (за рассматриваемый период времени), означающую, что коэффициенты прямых затрат a_{ij} постоянны. Тогда получаем следующее соотношение баланса, называемого **моделью Леонтьева**

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Введя вектор валового выпуска X , матрицу прямых затрат A и вектор конечного потребления Y

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

модель Леонтьева (1) можно записать в матричном виде

$$X = AX + Y \quad (2)$$

Матрица A , у которой все элементы a_{ij} неотрицательны, называется **продуктивной матрицей**, если существует такой неотрицательный вектор X , для которого выполняется неравенство $X > AX$.

Это неравенство означает, что существует хотя бы один режим работы отраслей данной экономической системы, при котором продукции выпускается больше, чем затрачивается на ее производство. Другими словами, при этом режиме создается конечный (прибавочный) продукт

$$Y = X - AX > 0.$$

Модель Леонтьева с продуктивной матрицей A называется **продуктивной моделью**.

Для проверки продуктивности матрицы A достаточно существования обратной матрицы $B = (E - A)^{-1}$ с неотрицательными элементами, где матрица E - единичная матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

С помощью модели Леонтьева (2) можно выполнить три вида плановых расчетов, при условии соблюдения условия продуктивности матрицы A :

1) Зная (или задавая) объемы валовой продукции всех отраслей X , можно определить объемы конечной продукции всех отраслей Y

$$Y = (E - A)X$$

2) Задавая величины конечной продукции всех отраслей Y , можно определить величины валовой продукции каждой отрасли

$$X = (E - A)^{-1}Y \quad (3)$$

3) Задавая для ряда отраслей величины валовой продукции, а для всех остальных отраслей - объемы конечной продукции, можно найти величины конечной продукции первых отраслей и объемы валовой продукции вторых.

Матрица

$$B = (E - A)^{-1}$$

называется **матрицей полных материальных затрат**. Ее смысл следует из матричного равенства (3), которое можно записать в виде $X = BY$. Элементы матрицы B показывают, сколько всего необходимо произвести продукции в i -ой отрасли, для выпуска в сферу конечного потребления единицы продукции отрасли j .

Цель работы: сделать анализ перетока товаров между отраслями экономики, обеспечивающего такое функционирование производственного

сектора, когда объем выпуска соответствует суммарному (т.е. производственному и конечному) спросу на товары.

Пример выполнения задания

Задача: экономическая система состоит из трех отраслей, для которых матрица прямых затрат A и вектор конечного продукта Y известны:

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.5 & 0.0 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Определить:

- 1) Матрицу коэффициентов полных материальных затрат B ;
- 2) Проверить продуктивность матрицы A ;
- 3) Вектор валового выпуска X ;
- 4) Межотраслевые поставки продукции x_{ij} .

Решение: Модель Леонтьева имеет вид:

$$X = AX + Y.$$

Матрица полных материальных затрат B равна:

$$B = (E - A)^{-1}$$

Продуктивность матрицы A проверяется, по вычисленной матрице B . Если эта матрица существует и все ее элементы неотрицательны, то матрица A продуктивна.

Вектор валового выпуска X рассчитывается по формуле:

$$X = BY$$

Межотраслевые поставки продукции x_{ij} вычисляются по формуле:

$$X_{ij} = a_{ij} x_j$$

Процесс решения задачи средствами Microsoft Excel

Введите матрицу A в ячейки с адресами A2:C4 и вектор Y в ячейки с адресами E2:E4 (**рис. 1**).

Microsoft Excel - Книга1							
Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка							
E12 {=ТРАНСП(E7:E9)}							
	A	B	C	D	E	F	G
1	Матрица А				Вектор Y		
2		0,3	0,1	0,4	200		
3		0,2	0,5	0	100		
4		0,3	0,1	0,2	300		
5							
6	Матрица Е				Вектор X		
7		1	0	0	775,5102		
8		0	1	0	510,2041		
9		0	0	1	729,5918		
10							
11	Матрица Е-А				Транспонированный вектор X		
12		0,7	-0,1	-0,4	775,5102	510,2041	729,5918
13		-0,2	0,5	0			
14		-0,3	-0,1	0,8			
15							
16	Матрица В						
17		2,040816	0,612245	1,020408			
18		0,816327	2,244898	0,408163			
19		0,867347	0,510204	1,683673			
20							
21	Межотраслевые поставки						
22		232,6531	51,02041	291,8367			
23		155,102	255,102	0			
24		232,6531	51,02041	145,9184			
25							
26							

Рис. 1. Задание исходных данных и последовательное выполнение плановых расчетов

2. Вычисление матрицы коэффициентов полных материальных затрат В.

2.1 Введите единичную матрицу Е в ячейки с номерами А7:С9.

2.2 Вычислите матрицу Е - А. Матрица Е - А является разностью двух матриц Е и А. Для вычисления разности двух матриц необходимо проделать следующее:

- 1) установите курсор мыши в левый верхний угол (это ячейка с адресом А12) результирующей матрицы Е - А, которая будет расположена в ячейках с адресами А12:С14;
 - 2) введите формулу =А7-А2 для вычисления первого элемента результирующей матрицы Е - А, введенную формулу скопируйте во все остальные ячейки результирующей матрицы.
3. Вычислите матрицу $B = (E - A)^{-1}$, являющейся обратной по отношению к матрице Е - А.

4. Проверка продуктивности матрицы А.

Поскольку матрица В найдена, следовательно она существует. Все элементы матрицы В неотрицательны, поэтому матрица В - продуктивна.

5. Вычисление вектора валового выпуска X .

Вычисление вектора валового выпуска X находим по матричной формуле $X = BY$, в которой матрица B вычислена, а вектор Y задан.

6. Вычисление межотраслевых поставок продукции x_{ij}

Межотраслевые поставки продукции x_{ij} вычисляются по формуле

$$X_{ij} = a_{ij} x_j,$$

где a_{ij} - элементы исходной матрицы A , расположенной в ячейках A2:C4, x_j - элементы вектора X , найденного выше в п. 4 и расположенные в ячейках E7:E9.

Для проведения вычислений x_{ij} , необходимо вычислить транспонированный вектор X^T относительно вектора X . При этом вектор-столбец X станет вектором-строкой X^T . Это необходимо для согласования размерностей дальнейшего умножения элементов векторов.

В результате в поле ячеек E12:G12 расположится транспонированный вектор X^T .

Затем вычислить межотраслевые поставки продукции x_{ij} . Для этого сделать следующие операции:

1. поставить курсор мыши в ячейку A22, в которой будет расположено значение x_{11} . В этой ячейке набрать формулу $=A2*E12$, которая означает, что $x_{11} = a_{11} x_1$.
2. введенную формулу скопируйте во все остальные ячейки первой строки (в ячейки A22:C22, протащив мышью крестик в правом нижнем углу от ячейки A22 при нажатой левой кнопке мыши, до ячейки C22. При этом будут вычислены $x_{12} = a_{12} x_2$ и $x_{13} = a_{13} x_3$.

Затем в ячейке A23 наберите формулу $=A3*E12$ и повторяя аналогичную процедуру, получите значения $x_{21} = a_{21} x_1$, $x_{22} = a_{22} x_2$ и $x_{23} = a_{23} x_3$. Повторите аналогичные действия для ячеек A24:C24.

В результате все межотраслевые поставки продукции будут найдены и расположатся в матрице с ячейками A22:C24.

Задание

Экономическая система состоит из трех отраслей, для которых матрица прямых затрат A и вектор конечного продукта Y даны в табл.1. Требуется определить:

- 1) Матрицу коэффициентов полных материальных затрат B ;
- 2) Проверить продуктивность матрицы A ;
- 3) Вектор валового выпуска X ;
- 4) Межотраслевые поставки продукции x_{ij} .

Таблица 1. Матрица прямых затрат A и вектор конечного продукта Y .

№	Вектор конечного продукта Y	Матрица прямых затрат A
1	100 Y = 200 400	0.3 0.2 0.1 A = 0.1 0.3 0.4 0.1 0.2 0.3
2	200 Y = 100 400	0.2 0.6 0.1 A = 0.1 0.2 0.1 0.2 0.1 0.2
3	100 Y = 300 400	0.5 0.4 0.1 A = 0.1 0.2 0.3 0.3 0.1 0.5
4	200 Y = 300 400	0.5 0.3 0.1 A = 0.1 0.2 0.1 0.1 0.2 0.4
5	100 Y = 200 150	0.3 0.2 0.1 A = 0.1 0.5 0.3 0.2 0.3 0.4
6	300 Y = 200 100	0.1 0.5 0.2 A = 0.4 0.1 0.3 0.2 0.4 0.2
7	100 Y = 200 300	0.6 0.1 0.2 A = 0.1 0.2 0.5 0.2 0.5 0.1
8	400 Y = 300 200	0.1 0.4 0.3 A = 0.1 0.3 0.2 0.6 0.2 0.1
9	100 Y = 150 200	0.5 0.1 0.3 A = 0.2 0.4 0.1 0.1 0.3 0.3
10	200 Y = 150 100	0 0.2 0.7 A = 0.5 0.4 0 0.2 0.3 0.1
11	250 Y = 200 500	0.1 0 0.2 A = 0.3 0.5 0 0.4 0.2 0.3
12	300 Y = 500 100	0 0.6 0.3 A = 0.5 0.1 0.2 0.3 0.1 0.2
13	300 Y = 250 400	0.2 0.5 0.1 A = 0 0.2 0.7 0.5 0.1 0
14	150 Y = 250 350	0.2 0.1 0.4 A = 0.5 0.2 0 0.1 0.1 0.5
15	100 Y = 200 400	0.5 0.1 0.3 A = 0.1 0.2 0.3 0 0.1 0

Контрольные вопросы

1. Применения метода наименьших квадратов для аппроксимации функции, заданной таблицей.
2. Анализ степенных рядов: выявление тенденции изменения показателя во времени и прогноз на предстоящий период.
3. Задачи линейной оптимизации, их решение.
4. Задача распределения неоднородных ресурсов. Составление оптимального плана выпуска продукции
5. Сбалансированная транспортная задача, ее решение.
6. Несбалансированная транспортная задача, ее решение
7. Задача о смесях. Составление смеси бензина с заданными показателями качества
8. Задача об использовании мощностей оборудования
9. Экономико-математическая модель межотраслевого баланса (модель Леонтьева).

Перечень использованных информационных ресурсов

1. Моделирование систем и процессов: учебник для академического бакалавриата / под ред. В.Н. Волковой, В.Н. Козлова. – М.: Изд-во Юрайт, 2019. – 450 с.
2. Макарова И.В., Маврин В.Г., Маврин Г.В. Моделирование процессов и систем: уч. пособие / Набережные Челны: изд-во НЧИ КФУ, 2018.- 130 с.
3. Карпушкин С.В. Основы моделирования процессов и систем: уч. пособие / Тамбов. - 2015. – 80 с.
4. Кельтон В., Лоу А. Имитационное моделирование. Классика CS. – СПб.; Киев: Издательская группа BHV, 2004. – 847 с.
5. Имитационное моделирование производственных систем / А.А. Вавилов, Д.Х. Имаев, В.И. Плескунин и др. – М.: Машиностроение; Берлин: Ферлог Техник, 1983. – 416 с.
6. Форрестер Дж. Основы кибернетики предприятия (индустриальная динамика). – М.: Прогресс, 1971. – 340 с.
7. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
8. Аюнов В.В. Имитационное моделирование технических систем. – Пермь: ИПЦ «Прокрость», 2017. – 242 с.
9. Петухов О.А. Моделирование: системное, имитационное, аналитическое / О.А. Петухов, А.В. Морозов, Е.О. Петухов. – СПб.: Изд-во СЗТУ, 2008. – 288 с.

10. Демидович Б.П. Численные методы анализа : приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения, учеб. пособие / Марон И.А., Шувалова Э.З.; под ред. Б.П. Демидовича; 4-е изд., стер. – СПб., М., Краснодар: Лань, 2008. - 400 с.